

Humboldt-Universität zu Berlin
School of Business and Economics
Ladislaus von Bortkiewicz Chair of Statistics



Bereinigung von Effekten durch das Chinesische Neujahr in Zeitreihendaten

Modeling effects from Chinese New Year in Time Series

Bachelorarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science (B.Sc.) im Studiengang Volkswirtschaftslehre

Autor: Shan Huang
MatNr. 553621

Version vom: 15.Juli 2015

1. Prüfer: Prof. Dr. Wolfgang Härdle
2. Prüfer: Prof. Ph. D. Michael C. Burda
Betreuer: Dr. Sigbert Klink

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	3
Tabellenverzeichnis	3
1 Einleitung	4
2 Grundkonzepte der Zeitreihenanalyse	6
2.1 Begriff der Zeitreihe	6
2.2 Zeitreihenmodelle	7
2.2.1 Deterministische Dynamik	7
2.2.2 Stochastische Prozesse und ARMA-Modelle	8
2.2.3 Regression mit ARMA-Störterm	10
2.3 Stationarität	11
2.3.1 Stationarität und Invertierbarkeit in ARMA-Modellen	12
2.3.2 Nichtstationarität und Integration	14
2.4 Saisonalität in ARIMA-Modellen	15
3 Methodik der Modellanpassung	17
3.1 Transformationen zur Stationarisierung	17
3.2 Modellidentifikation	19
3.3 Schätzung der Modellparameter	21
3.4 Modelldiagnose	23
3.5 Modellvergleich	24
4 Analyse der Daten	26
4.1 Operationalisierung	26
4.2 Datenherkunft und -aufbereitung	27
4.3 Modellidentifikation	29
4.3.1 Identifikation eines ARIMA-Modells	29
4.3.2 Identifikation eines Regressionsmodells mit ARIMA-Störterm	31
4.4 Modellschätzung und Diagnose	32
4.5 Modellvergleich	33
5 Fazit	35
Literaturverzeichnis	37
Anhang	38

Abbildungsverzeichnis

1	Exporte und logarithmierte Exporte	28
2	Trendbereinigung der Exportdaten	29
3	Monatsdurchschnitte des Exportdaten	30
4	ACF und PACF der Exportdaten	31
5	ACF und PACF der Exportdaten nach saisonaler Differenzenbildung . . .	31
6	ACF und PACF der Exportdaten nach Regression mit $\tau = 3$	32
7	ACF und PACF der Exportdaten nach Regression mit $\tau = 7$ und $\tau = 14$.	40

Tabellenverzeichnis

1	Diagnosewerte für ARIMA-Modelle unterschiedlicher Ordnungen und Werten für τ	33
2	Maximum-Likelihood-Schätzer für die jeweiligen Modelle mit höchsten Diagnosewerten	34
3	Ergebnisse der Likelihood-Quotienten-Tests	34

1 Einleitung

Als Anfang diesen Jahres (2015) aktuelle makroökonomische Daten und Wirtschaftsindekatoren veröffentlicht wurden, ging die Nachricht über ein Ende des bisher rapiden Wachstums Chinas durch die Presse. So berichtete die Zeitschrift „The Economist“ im Februar von wenig zuversichtlichen Wirtschaftszahlen¹:

The numbers made it look as if China was on the brink of deflation. Consumer prices rose just 0.8% from a year earlier, a sharp decline from preceding months. Trade was also weak, with exports falling 3% and imports down 20% (...).

Die Verlangsamung des Wirtschaftswachstums ist eine komplexe Problematik, die China langfristig betrifft. Allerdings wird in diesem Artikel auch ein rechnerischer Grund genannt, der für den starken Abschwung in den Zahlen mitverantwortlich ist:

The Chinese New Year holiday, and with it a peak in consumption and prices, scuttles back and forth between January and February (in the Gregorian calendar), complicating the annual comparisons. Every few years—2015 being one—the impact is bigger than most. Thanks to the insertion of a lunar leap month last year, the Chinese New Year holiday falls especially late this February (it begins on the 18th).

Das Chinesische Neujahr folgt einem Lunisolarkalender und bewegt sich aus diesem Grund zwischen Januar und Februar des Gregorianischen Kalenders, mit einem anderem Datum für jedes Jahr. Gleichzeitig ist es das mit Abstand größte in China gefeierte Fest, mit ähnlich großen Auswirkungen auf die Wirtschaft wie das Weihnachtsfest in Westeuropa. Anders als Weihnachten sorgt der jährlich unterschiedliche Termin des Chinesischen Neujahrs dafür, dass sich sein Effekt nicht immer auf die Wirtschaftsdaten des gleichen Monats auswirkt und dadurch schwieriger zu bereinigen ist.

Auch die Deutsche Bundesbank merkt an, dass kalendarische Konstellationen einen erheblichen Einfluss auf Konsum, Produktion und Export haben können, von beispielsweise bis zu 5% für die deutsche Industrieproduktion (vgl. Deutsche Bundesbank 2012). Dabei können kalendarische Effekte als typische Muster in den Wirtschaftsdaten auftreten, wenn sie, wie das Weihnachtsfest, jährlich in einem bestimmten Monat oder Quartal stattfinden. Von einer Bereinigung dieser regulären saisonalen Einflüsse nicht betroffen sind auf der anderen Seite separat zu betrachtende Kalendereffekte wie durch das Chinesische Neujahr oder Ostern verursachte, welche keinem spezifischen Monat oder Quartal eines Jahres zugeordnet werden können. So werden auch in den statistischen Auswertungen der Bundesbank derartige Effekte wie die des Osterfestes oder die der unterschiedlichen

¹The Economist: Lunar Eclipse; <http://www.economist.com/node/21643229>; letzter Zugriff am 10. Juli 2015

Anzahl an Wochenendtagen in einem Monat getrennt kalkuliert.

In der amtlichen Statistik haben sich, für die zeitliche Darstellung irregulärer Kalendereffekte, wie von Bell and Hillmer (1983) entworfene regArima-Modelle - Regressionsmodelle, die auch einen stochastischen Teil beinhalten - durchgesetzt. Das von ihnen präsentierte Modell beachtet sowohl die Verschiebung des Osterfestes als auch die Anzahl der Arbeitstage in einem Monat und wurde empirisch getestet. Dieses Modell haben Lin et al. (2002) für mehrere taiwanesischen Zeitreihen genutzt und angepasst, indem sie den Effekt durch weitere traditionelle Feiertage (das Drachenbootfest und das Mondfest) einbeziehen.

Die Analyse in dieser Arbeit konzentriert sich auf eine Zeitreihe, die ebenfalls in Lin et al. (2002) vorlag, nämlich die der Exportwerte. Allerdings verläuft die Datenreihe nunmehr bis zum Mai diesen Jahres, wodurch Werte für über zehn Jahre dazugewonnen werden. Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass das Hauptaugenmerk auf die Tage direkt nach dem chinesischen Neujahrsfest liegt, so wie sich der originale Ansatz von Bell und Hilmer auf die Tage nach dem Osterfest konzentrierte. In Lin und Lius Arbeit spielen dagegen Effekte vor dem Feiertag eine Rolle. Allerdings könnte es in diesem Fall eine gewisse Ambivalenz geben, da zwar aufgrund der freien Tage weniger gearbeitet wird, die Firmen aber üblicherweise versuchen, kurz vor den Festtagen die Aufträge abzuschicken. In dieser Arbeit fließen die Tage nach dem Feiertag in das Modell ein, wodurch sich ein deutlicher negativer Effekt auf die Exportwerte ergeben sollte.

Ziel der Arbeit ist es, zunächst darzulegen, wie die Auswirkungen eines irregulären Feiertags wie des Chinesischen Neujahrs für eine Zeitreihe statistisch modelliert werden können. Ebenfalls ist empirisch zu zeigen, dass die Feiertage nach dem Chinesischen Neujahr einen negativen Effekt auf den Export haben. Zuletzt soll demonstriert werden, dass die Beachtung dieses Effekts zu einer wesentlichen Verbesserung des Modells führt.

Dafür werden im ersten Teil der Arbeit die theoretischen Grundlagen für die Zeitreihenanalyse genau erläutert. Der zweite Teil ist der Methodik gewidmet, mit der die Daten analysiert werden sollen. Im dritten wird dokumentiert, wie die Exportdaten aufbereitet und weswegen die Schlüsse gezogen werden, die schließlich im letzten Teil zusammengefasst sind.

2 Grundkonzepte der Zeitreihenanalyse

In der ökonomischen Zeitreihenanalyse liegt der Fokus auf der Art und Weise, mit der aktuelle Daten einer Zeitreihe im Zusammenhang zu früheren Daten derselben Reihe stehen. Diese eingeschränkte Betrachtung führt zwar zu einem Informationsverlust, hat jedoch zahlreiche Vorteile, weswegen die Zeitreihenanalyse ein wichtiges Feld in der Statistik und in der Ökonometrie belegt. So verhilft sie vor allem zu einem Kenntnisszuwachs über das Verhalten von Variablen, die noch nicht ausreichend theoretisch fundiert sind (vgl. Assenmacher 2002, S. 201f.). Dadurch werden auch Prognosen über zukünftige Entwicklungen möglich. Gerade in dem Fall, dass doch Annahmen über exogene, auf die Zeitreihe einwirkende Einflüsse getroffen werden können, lassen sich zudem umfassende Modelle erstellen. Wissen über das Verhalten der einzelnen Variablen mit der Zeit verhindert dann falsche Schlüsse, wie zum Beispiel bei Scheinregressionen von Variablen, die mit dem Verlauf der Zeit gemeinsam ansteigen.

Im Folgenden werden daher wichtige Grundbegriffe der Zeitreihenanalyse beschrieben und erklärt. Eine bedeutende Rolle in der späteren Analyse spielt die Klasse der sogenannten ARIMA-Modelle, deren Bestandteile ebenfalls in diesem Teil erläutert werden.

2.1 Begriff der Zeitreihe

Ziel der induktiven Statistik ist es, allgemeine Rückschlüsse über eine umfassendere Grundgesamtheit zu ziehen, indem Stichproben aus dieser mit Hilfe von wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden analysiert werden. Dabei sollen die einzelnen Beobachtungen unter gleichen Bedingungen gewonnen, bzw. zufällig gezogen werden, währenddessen die genaue Reihenfolge der aufgetretenen Werte irrelevant ist.

Die Zeitreihenanalyse dagegen ist ein Gebiet der Statistik, in dem die zeitliche Anordnung der Datenpunkte wesentlich ist, da aktuelle Beobachtungen im Zusammenhang zu vergangenen stehen. Bei einer Zeitreihe $(y_t)_{t \in T}$ handelt es sich um die zeitlich geordnete Folge von Realisierungen einer Zufallsvariablen Y . Die Menge der Indizes T beschreibt dann die zumeist endliche Menge $T = \{1, 2, \dots, N\}$ der einzelnen Beobachtungszeitpunkte (Perioden) t . Aus theoretischen Betrachtungen heraus interessiert aber manchmal auch eine unendliche Menge an Perioden $T = \mathbb{Z}$.

Eine äquidistante Zeitreihe verfügt über denselben zeitlichen Abstand zwischen sämtlichen aufeinanderfolgenden Beobachtungen (vgl. Assenmacher 2002, S. 203). Die meisten ökonometrischen Zeitreihen sind äquidistant, da sie beispielsweise monatlich oder quartalsweise erhoben werden.

Ein Beispiel für eine äquidistante Zeitreihe sind die monatlichen Messwerte der Höhe des Exports eines Landes, wie im praktischen Teil für Taiwan untersucht werden soll.

2.2 Zeitreihenmodelle

Zur Beschreibung und Analyse von Zeitreihen existiert eine Vielzahl verschiedener Methoden und Modelle, die den Zeitreihen unterschiedliche Eigenschaften unterstellen. Im Allgemeinen wird von einer Zeitreihe ausgegangen, deren Entwicklungen unterschiedlichen Einflüssen unterliegt und die daher in verschiedene Komponenten aufgespalten werden kann (vgl. Schlittgen and Streitberg 2001, S. 9):

- die Trendkomponente m_t , welche eine langfristige systematische Veränderung in den Daten widerspiegelt, beispielsweise das langfristige Wachstum der Wirtschaftsleistung einer Nation;
- die Konjunkturkomponente k_t , die den Verlauf der unregelmäßig auftretenden Konjunkturzyklen darstellt;
- die Saisonkomponente s_t , diese gibt regelmäßige jahreszeitlich bedingte Schwankungen in den Beobachtungen wieder, wie etwa die jährlich steigende Arbeitslosigkeit im Winter;
- die Restkomponente u_t , welche sonstige irreguläre oder zufällige Einflüsse zusammenfasst.

Häufig führt die theoretische Trennung zwischen Konjunktur- und Trendkomponente zu Problemen in der praktischen Auswertung, weswegen m_t und k_t auch als sogenannte glatte Komponente g_t zusammengefasst werden.

Für den funktionalen Zusammenhang der einzelnen Komponenten wird zumeist ein *additives Komponentenmodell* angenommen:

$$y_t = g_t + s_t + u_t. \quad (2.1)$$

Möglich ist auch die multiplikative Überlagerung der Komponenten (*multiplikatives Komponentenmodell*), wodurch mit einer steigenden glatten Komponente auch die Varianz der Beobachtungswerte um die glatte Komponente ansteigt (vgl. Schlittgen and Streitberg 2001):

$$y_t = g_t s_t u_t. \quad (2.2)$$

Für eine Unterscheidung zwischen den genauen funktionalen Darstellungen einer Zeitreihe ist eine wesentliche Trennung die zwischen der Annahme deterministischer oder stochastischer Realisierungen. Auf beide soll im Folgenden eingegangen werden.

2.2.1 Deterministische Dynamik

Dem klassisch deterministischen Ansatz der Zeitreihenanalysen liegt zugrunde, dass die Zeitreihe als feste Folge von Zahlen betrachtet wird. Der Restkomponente wird $u_t \sim$

i.i.d. $N(0, \sigma^2)$ unterstellt, die Zufallseinflüsse sollen also als „weißes Rauschen“ unsystematisch und mit konstanter Varianz um null schwanken. Zudem sollen sie unabhängig voneinander sein, womit eine Autokorrelation der Störungen ausgeschlossen ist (vgl. Schlittgen and Streitberg 2001, S. 19).

Das einfachste Beispiel eines klassischen Modells verfügt über eine lineare Gerade als Trendfunktion $m_t = a + bt$ und über keine Saisonkomponente. In Gleichung (2.1) eingesetzt, ergibt sich

$$y_t = a + bt + u_t, \quad (2.3)$$

was einem linearen Regressionsmodell entspricht. Die Unabhängigkeitsannahme führt dann dazu, dass über die Kleinstquadratmethode ermittelte Schätzer Optimalitätsbedingungen erfüllen (siehe z.B. Assenmacher 2002), bzw. BLUE („best linear unbiased estimators“) sind.

Liegt keine Vorstellung über die funktionale Form der glatten Komponente vor, können lokale Methoden wie z.B. Filter verwendet werden, um wesentliche Merkmale zu extrahieren. Ausführlichere Erläuterungen finden sich u.a. bei Schlittgen and Streitberg 2001 (S. 35ff.). Generell gilt allerdings die Annahme, dass die Restkomponente u_t vernachlässigbar ist.

Gerade die Unabhängigkeitsannahme über die Restkomponente zeigt sich jedoch in realen Zeitreihen selten erfüllt, sobald die Abweichungen eines geschätzten Trendmodells von den Daten $\hat{u}_t = y_t - \hat{m}_t$ auf ihre Unabhängigkeit voneinander getestet werden. Die Autokorrelation zum jeweils zeitlich vorangehenden Wert (Lag 1) kann z.B. mittels *Durbin-Watson-Test* getestet werden. Für die Teststatistik gilt

$$d = \sum_{t=2}^N (\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2 / \sum_{t=1}^N (\hat{u}_t)^2,$$

wobei nur für Werte von $d \approx 2$ die Nullhypothese unkorrelierter Störungen nicht widerlegt werden kann (vgl. Schlittgen and Streitberg 2001, S. 19f.).

2.2.2 Stochastische Prozesse und ARMA-Modelle

Seit einiger Zeit werden verstärkt Modelle, die auf stochastischen Prozessen basieren, zu Rate gezogen, um ökonomische Zeitreihen zu analysieren. Die Unabhängigkeitsannahme wird vernachlässigt, im Gegenteil liegt der Fokus gerade auf den Abhängigkeiten der Werte voneinander. u_t wird nunmehr als Impuls gesehen, der sich nicht nur auf y_t , sondern auch auf darauffolgende Werte y_{t+1}, y_{t+2} usw. auswirkt (vgl. Assenmacher 2002, S. 203ff.):

$$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, u_t). \quad (2.4)$$

Jedem Zeitpunkt t wird eine Zufallsvariable Y_t zugeordnet, wovon y_t eine Realisation darstellt. Die Folge der Zufallsvariablen $(Y_t)_{t \in T}$ wird *stochastischer Prozess* genannt. Eine

vorliegende Zeitreihe $(y_t)_{t \in T}$ ist dann eine Realisation aus der Menge aller möglichen stochastischen Prozesse. Sie kann wie in (2.4) notiert werden.

Um konkrete Werte angeben zu können, müssen jedoch die Funktion f sowie die Anzahl der ihr zugeordneten vergangenen Werte und die Eigenschaften von u_t bestimmt werden. Ist y_t linear von den vergangenen Werten der Zeitreihe und einem Störterm abhängig, ergibt sich für (2.4):

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + u_t, \quad (2.5)$$

wobei p die Anzahl der gewichteten Vergangenheitswerte ist, die sich auf y_t auswirken. Handelt es sich bei u_t um weißes Rauschen, d.h. $u_t \sim i.i.d N(\mu, \sigma^2)$, wird (2.5) als *reiner autoregressiver Prozess der Ordnung p* oder $AR(p)$ bezeichnet. Zur Veranschaulichung kann man sich überlegen, dass ein Schock, wie z.B. neu eingeführte Zollregelungen, die gegenwärtigen Exporte beeinflusst; da zukünftige Exporte aber von vergangenen abhängen, zieht sich der Schock durch mehrere Perioden.

Alternativ kann sich die Folge $(u_t)_{t \in T}$ auch, anstatt als reiner Zufallsprozess vorzuliegen, als „gewichtetes Mittel aus gegenwärtigen und vorangegangenen Schocks“ (Schlittgen and Streitberg 2001, S. 116) zusammensetzen. Abhängig davon, aus wie vielen Perioden q sich die Schocks auf gegenwärtige Werte auswirken, liegt u_t als *Moving Average Prozess der Ordnung q* , abgekürzt $MA(q)$, vor:

$$u_t = \beta_0 \epsilon_t - \beta_1 \epsilon_{t-1} - \beta_2 \epsilon_{t-2} - \dots - \beta_q \epsilon_{t-q} \text{ mit } \beta_0 = 1. \quad (2.6)$$

Es gilt $\epsilon_t \sim i.i.d N(0, \sigma^2)$ (nach Definition von Box and Jenkins 1976, S. 10ff.). Die in einer Periode t ausgelösten Zufallsschocks sind damit unabhängig von denen anderer Zeitpunkte.

Wird ein $MA(q)$ -Prozess (2.6) für den Störterm u_t aus Gleichung (2.5) eingesetzt, ergibt sich für y_t ein *Autoregressiver-Moving-Average-Prozess der Ordnung (p, q)* , abgekürzt als $ARMA(p, q)$ -Prozess:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \epsilon_t - \beta_1 \epsilon_{t-1} - \dots - \beta_q \epsilon_{t-q} \\ y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \dots - \alpha_p y_{t-p} &= \epsilon_t - \beta_1 \epsilon_{t-1} - \dots - \beta_q \epsilon_{t-q} \end{aligned} \quad (2.7)$$

mit $\epsilon_t \sim i.i.d N(0, \sigma^2)$. p legt die Ordnung des AR-Teils fest, q gibt analog die Ordnung des MA-Teils an. Ein ARMA-Modell verfügt über $p + q + 1$ unbekannte Parameter, die aus den beobachteten Daten geschätzt werden: die Varianz der Schocks σ_ϵ^2 sowie die Parameter der Prozesse $\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q$.²

(2.7) kann umgeschrieben werden, indem ein Backshift-Operator B zurate gezogen wird.

²Zuweilen wird auch ein Modell mit Interzept $\alpha_0 \neq 0$ angenommen. y_t wird dann mit $\tilde{y}_t = y_t - \alpha_0$ ersetzt und die Anzahl der unbekannten Parameter erhöht sich um eins, nämlich um α_0 (vgl. Box and Jenkins 1976, S. 11).

B beinhaltet die Anweisung, eine zeitabhängige Variable um eine Periode in die Vergangenheit zu verschieben: $Bx_t = x_{t-1}$. Die s -fache Ausführung des Backshift-Operator hintereinander wird mit $B^s x_t = x_{t-s}$ gekennzeichnet, die Folge x_t wird also um s Zeiteinheiten verschoben. Für B^0 gilt $B^0 x_t = x_t$. Die Bildung der Gewichtungen für vergangene Werte im AR-Teil kann so wie folgt abgekürzt werden: $y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \dots - \alpha_p y_{t-p} - u_t = (1B^0 - \alpha_1 B^1 - \dots - \alpha_p B^p)y_t - u_t = \alpha(B)y_t - u_t$. Verfährt man analog mit dem MA-Teil, d.h. $\epsilon_t - \beta_1 \epsilon_{t-1} - \dots - \beta_q \epsilon_{t-q} = \beta(B)\epsilon_t$, ergibt sich

$$\alpha(B)y_t = \beta(B)\epsilon_t. \quad (2.8)$$

Eine der bedeutendsten Bedingungen dafür, allgemeine Aussagen über sämtliche Zeitpunkte eines stochastischen Prozesses treffen zu können, ist die der Stationarität. In Teil 2.3 werden die Grundlagen dafür geklärt, um in Teil 2.3.1 auf die stochastischen Eigenschaften der Prozesse einzugehen.

2.2.3 Regression mit ARMA-Störterm

In der späteren Analyse sollen Feiertageffekte beachtet werden, die durch das Chinesische Neujahr ausgelöst werden. Dafür wird ein Modell benötigt, das die stochastische Dynamik der ARMA-Modelle beinhaltet, aber auch Auswirkungen durch exogene Variablen zulässt. Ein allgemeines lineares Regressionsmodell sieht wie folgt aus (vgl. Hyndman and Athanasopoulos 2014):

$$y_t = \pi_0 + \pi_1 x_{1,t} + \dots + \pi_k x_{k,t} + e_t.$$

y_t ist linear von k exogenen Variablen zum Zeitpunkt t abhängig. Der Störterm e_t wird wieder als weißes Rauschen angenommen.

Aus Gründen der Vereinfachung soll zukünftig nur der Fall mit einer exogenen Variable x_t betrachtet werden. Die Unabhängigkeitsannahme für die Störterme wird fallengelassen, stattdessen sollen sie einem ARMA(p, q)-Prozess folgen. Um diese Änderung zu verdeutlichen, wird η_t statt e_t notiert:

$$y_t = \pi_0 + \pi_1 x_t + \eta_t. \quad (2.9)$$

Für η_t gilt dann, sobald der ARMA-Prozess (2.8) nach der Zeitreihenvariable aufgelöst wird (vgl. Hyndman and Athanasopoulos 2014)³:

$$\eta_t = \beta(B)\alpha(B)^{-1}\epsilon_t.$$

³Diese Darstellung setzt die Existenz von $\alpha(B)^{-1}$ voraus. Wie im Kapitel 2.3 zu sehen sein wird, muss der ARMA-Prozess dafür stationär sein.

In (2.9) eingesetzt, ergibt sich schließlich die Gleichung für ein *Modell mit einer exogenen Regressorvariable und ARMA-Störterm*:

$$y_t = \pi_0 + \pi_1 x_t + \beta(B)\alpha(B)^{-1}\epsilon_t. \quad (2.10)$$

Nur noch ϵ_t wird nun als weißes Rauschen angenommen.

2.3 Stationarität

Für die Analyse eines stochastischen Prozesses $(Y_t)_{t \in T}$ werden einige Eigenschaften untersucht, die durch folgende Funktionen definiert sind (vgl. Schlittgen und Streitberg 2001, S. 95, 97):

- die Mittelwertfunktion gibt die Erwartungswerte für die Zufallsvariable Y_t an: $\mu_Y(t) = \mu_t = \mathbb{E}(Y_t)$;
- die Varianzfunktion gibt die Varianzen für die Zufallsvariable Y_t an: $\sigma_Y^2(t) = \sigma_t^2 = \text{Var}(Y_t)$;
- die (Auto-)Kovarianzfunktion des stochastischen Prozesses Y_t ordnet jedem Paar an Zeitpunkten $s, t \in T$ die Kovarianz der entsprechenden Zufallsvariablen Y_s und Y_t zu: $\gamma(s, t) = \gamma_{s,t} = \text{Covar}(Y_s, Y_t) = \mathbb{E}([Y_s - \mu_s][Y_t - \mu_t])$;
- die (Auto-)Korrelationsfunktion des stochastischen Prozesses Y_t ordnet jedem Paar an Zeitpunkten $s, t \in T$ die Korrelation der entsprechenden Zufallsvariablen Y_s und Y_t zu: $\rho(s, t) = \rho_{s,t} = \text{Cor}(Y_s, Y_t) = \frac{\gamma(s,t)}{\sqrt{\sigma_s^2 \sigma_t^2}}$.

Ein stochastischer Prozess wird dann als *schwach stationär* bezeichnet, wenn Mittelwert und Varianz der Reihe konstant über alle Perioden sind und die Kovarianz zweier Zeitreihenwerte nur von ihrem zeitlichen Abstand $k = s - t$ zueinander abhängen (vgl. Assenmacher 2002, S. 203).⁴ Das bedeutet:

- $\mu_Y(t) = \mu \quad \forall t \in T$, Mittelwertstationarität;
- $\sigma_Y^2(t) = \sigma_Y^2 \quad \forall t \in T$, Varianzstationarität;
- $\gamma(s, t) = \gamma(s', t') = \gamma(s-t) = \gamma(k) \quad \forall s, s', t, t' \in T$ mit $s-t = s'-t' = k$ bzw. $\rho(s, t) = \rho(k) \quad \forall s, t \in T$ mit $s-t = k$, Kovarianzstationarität bzw. Korrelationsstationarität

⁴Bei einem streng stationären Prozess bleibt die gemeinsame Verteilungsfunktion F jedes endlichen Systems an Zufallsvariablen gleich für jede zeitliche Verschiebung h , also $F(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) = F(Y_{t_1+h}, \dots, Y_{t_n+h})$ (vgl. Assenmacher 2002). Sämtliche stochastischen Eigenschaften bleiben also über die Zeit hinweg unverändert. In der ökonometrischen Zeitreihenanalyse sind die Eigenschaften schwach stationärer Prozesse ausreichend.

sind erfüllt. Mit anderen Worten ist eine konkrete Zeitreihe stationär, falls ihre Eigenschaften nicht vom Zeitpunkt der Beobachtungen abhängig sind. Aus der Kovarianzstationarität folgt die Varianzstationarität, da $\sigma^2(t) = \gamma(t, t) = \gamma(0) = \gamma(s, s) = \sigma^2(s)$ (vgl. Schlittgen and Streitberg 2001, S. 100). Ebenfalls folgt aus der Kovarianzstationarität die Korrelationsstationarität. Deswegen reichen für eine schwach stationäre Zeitreihe die Bedingungen der Mittelwertstationarität und Kovarianzstationarität aus.

2.3.1 Stationarität und Invertierbarkeit in ARMA-Modellen

Um die Stationaritätsbedingung für ARMA-Modelle herzuleiten, müssen die Eigenschaften des weißen Rauschens sowie der $AR(p)$ - und $MA(q)$ -Prozesse einzeln untersucht werden.

ϵ_t sei, wie oben angegeben, ein Prozess weißen Rauschens: $\epsilon_t \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$. Seine Definition legt dann folgende stochastische Eigenschaften fest (siehe Box and Jenkins 1976, S. 46f.):

- $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$, Mittelwertstationarität;
- $Var(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$, Varianzstationarität;
- $\gamma(k) = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$, bzw. $\rho(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$, Kovarianzstationarität
- und demnach *Stationarität*.

Ein $MA(q)$ -Prozess bildet, wie oben beschrieben, ein gewichtetes Mittel über die Schocks ϵ_t . Da ϵ_t als weißes Rauschen einen stationären Prozess darstellt, ist auch ein wie in (2.6) definierter $MA(q)$ -Prozess u_t stationär. Es gelten folgende Eigenschaften für einen solchen Prozess u_t (vgl. Box and Jenkins 1976, S. 68):

- $\mathbb{E}(u_t) = \mathbb{E}(\epsilon_t) - \beta_1 \mathbb{E}(\epsilon_{t-1}) - \dots - \beta_q \mathbb{E}(\epsilon_{t-q}) = (1 - \beta_1 - \dots - \beta_q) \mu_\epsilon = 0$, Mittelwertstationarität;
- $\gamma(k) = \begin{cases} (-\beta_k + \beta_1 \beta_{k+1} + \dots + \beta_{q-k} \beta_q) \sigma_\epsilon^2 & \text{für } k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & \text{für } k > q \end{cases}$,
bzw. $\rho(k) = \begin{cases} \frac{-\beta_k + \beta_1 \beta_{k+1} + \dots + \beta_{q-k} \beta_q}{1 + \beta_1^2 + \dots + \beta_q^2} & \text{für } k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & \text{für } k > q \end{cases}$, Kovarianzstationarität
- und demnach *Stationarität*.

Ein $AR(p)$ -Prozess erfüllt, anders als der $MA(q)$ -Prozess, nicht schon nach Definition die Stationaritätsbedingungen. Allerdings kann ein $AR(p)$ -Prozess stationär sein, sofern er

sich als MA(q)-Prozess darstellen lässt, da dieser stets stationär ist. Das ist der Fall, wenn $\alpha(B)$ invertierbar ist oder, mit anderen Worten, $\alpha(B)^{-1}$ existiert:

$$\begin{aligned}\alpha(B)y_t &= u_t \\ y_t &= \alpha(B)^{-1}u_t.\end{aligned}$$

In diesem Fall kann y_t nämlich als unendliche Summe über die Zufallsschocks u_t und damit als MA(∞)-Prozess dargestellt werden. Zur Veranschaulichung kann ein AR(1)-Prozess betrachtet werden:

$$\begin{aligned}y_t &= \alpha_1 y_{t-1} + u_t \\ y_{t-1} &= \alpha_1 y_{t-2} + u_{t-1} \\ y_{t-2} &= \alpha_1 y_{t-3} + u_{t-2} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Werden nun sukzessiv die Werte vergangener Perioden in den AR(1)-Prozess eingesetzt, wird der Zusammenhang zum MA(∞)-Prozess schnell ersichtlich (vgl. Schlittgen and Streitberg 2001, S. 122):

$$y_t = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s u_{t-s}.$$

Die Frage nach der Existenz von $\alpha(B)^{-1} = (1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_p B^p)^{-1}$ wird umformuliert durch die Einführung einer z -Transformierten $\alpha(z)$: die Inverse zu $\alpha(z) = 1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_p z^p$ muss existieren. z ist hierbei eine komplexe Zahl, $\alpha(z)$ wird charakteristisches Polynom genannt (vgl. Schlittgen and Streitberg 2001, S. 114f.). Wie z.B. bei Box and Jenkins 1976 (S. 53ff.) gezeigt wird, ist für die Invertierbarkeit des charakteristischen Polynoms und damit für die Existenz von $\alpha(B)^{-1}$ ausschlaggebend, dass alle Lösungen der charakteristischen Gleichung $\alpha(z) = 0$ außerhalb des Einheitskreises liegen.

Die Invertierbarkeitsbedingung und zugleich *Stationaritätsbedingung für einen AR(p)-Prozess* lautet demzufolge, dass die Lösungen ihres charakteristischen Polynoms außerhalb des Einheitskreises liegen müssen. Praktisch hat Stationarität bei AR(p)-Prozessen aus Wirtschaftsmodellen den Effekt, dass eine Zeitreihe, wie z.B. die monatlichen Exportwerte, nach einem Schock kein explosives oder sonst instabiles Verhalten zeigen, sondern sich wieder auf ein stabiles Niveau einpendelt.

Die *Invertierbarkeitsbedingung eines MA(q)-Prozesses* wird analog zu oben aufgebaut:

$$\begin{aligned}u_t &= \beta(B)\epsilon_t \\ u_t \beta(B)^{-1} &= \epsilon_t\end{aligned}$$

Liegen die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\beta(z) = 1 - \beta_1 z - \beta_2 z^2 - \dots - \beta_q z^q = 0$ außerhalb des Einheitskreises, so existiert $\beta(B)^{-1}$ und damit ist der MA(q)-Prozess invertierbar. Mit seiner Invertierbarkeit wirkt die lineare Transformation bzw. der sogenannte *Filter* $\beta(B)$ kausal. Intuitiv heißt das, vom Output u_t kann über $\beta(B)^{-1}$ auf den ursprünglichen Input ϵ_t geschlossen werden (vgl. Schlittgen and Streitberg 2001, S.110). Die obigen Invertierbarkeitsbedingungen gelten in ähnlicher Weise für einen ARMA-Prozess y_t wie in 2.8:

$$\begin{aligned}\alpha(B)y_t &= \beta(B)\epsilon_t \\ y_t &= \alpha(B)^{-1}\beta(B)\epsilon_t.\end{aligned}$$

Liegen die Lösungen des charakteristischen Polynoms zu $\alpha(z) = 0$ außerhalb des Einheitskreises, so existiert $\alpha(B)^{-1}$ und der ARMA(p, q)-Prozess ist *stationär* (vgl. Box and Jenkins 1976, S. 74). Liegen sämtliche Lösungen der charakteristischen Gleichung $\beta(z) = 0$ außerhalb des Einheitskreises, ist der Prozess darstellbar als

$$\begin{aligned}\alpha(B)y_t &= \beta(B)\epsilon_t \\ \alpha(B)\beta(B)^{-1}y_t &= \epsilon_t\end{aligned}$$

und er wird *invertierbar* genannt (vgl. Box and Jenkins 1976, S. 74).

2.3.2 Nichtstationarität und Integration

Zahlreiche empirische Zeitreihen besitzen nicht die Eigenschaften stationärer Prozesse. Dennoch verhalten sich einzelne Teile unter Umständen sehr ähnlich, allerdings auf unterschiedlichem Niveau, wie bei Box and Jenkins 1976 (S. 90ff.) veranschaulicht wird. Ist keine Varianzstationarität gegeben, kann eine Transformation der Zeitreihe über Logarithmierung helfen (vgl. Hyndman and Athanasopoulos 2014). Nimmt man die Logarithmen der Werte eines multiplikativen Komponentenmodells (2.2), kann eine Zeitreihe auf ein additives Modell zurückgeführt werden (vgl. Assenmacher 2002, S. 220f.):

$$\begin{aligned}\log(y_t) &= \log(g_t s_t u_t) \\ &= \log(g_t) + \log(s_t) + \log(u_t).\end{aligned}$$

Typischerweise verfügen ökonomische Zeitreihen über einen Trend, wodurch sie nicht mittelwertstationär sind. Generell wird zwischen zwei Arten von Trends unterschieden, die deswegen auf unterschiedliche Weise eliminiert werden sollten, aber auch gemeinsam auftreten können.

Ein *deterministischer Trend* entspricht der glatten Komponente eines, wie in Abschnitt 2.2.1 beschriebenen, deterministischen Modells. Sie unterliegt also keinen Zufallseinflüssen.

sen. Wird die Zeitreihe um ihren Trend bereinigt, kann sie weiter untersucht werden (vgl. Nau 2015, Stationarity and differencing). Der Trend einer Zeitreihe der Form

$$\tilde{y}_t = a + bt + y_t$$

könnte beispielsweise über eine lineare Regression oder Filtermethoden geschätzt werden. Subtrahiert man $\hat{a} + \hat{b}t$, kann die Abweichung vom Trend y_t immer noch Zufallseinflüssen unterliegen und z.B. über ARMA-Prozesse darstellbar sein.

Ein *stochastischer Trend* resultiert aus den Zufallseinflüssen des Prozesses. Häufig kann er über Differenzenbildung eliminiert und ein ARMA(p, q)-Modell auf die differenzierte Zeitreihe angepasst werden, wie bei Box and Jenkins 1976 (S.87 ff.) dargelegt wird. Ist in einem Modell

$$\tilde{\alpha}(B)y_t = \beta(B)\epsilon_t \quad (2.11)$$

der AR-Operator $\tilde{\alpha}(B)$ nichtstationär, sodass d Lösungen von $\tilde{\alpha}(B) = 0$ auf dem Einheitskreis und $p - d$ Lösungen außerhalb liegen, kann der AR-Teil mit einem stationären AR-Operator umgeschrieben werden:

$$\tilde{\alpha}(B)y_t = \alpha(B)(1 - B)^d y_t = \beta(B)\epsilon_t. \quad (2.12)$$

Dabei drückt $(1 - B)^d$ die d -fache Differenzenbildung aus: $(y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) - \dots - (y_{t-d+1} - y_{t-d}) = y_t - B^d y_t = (1 - B)^d y_t$. Das differenzierte Modell (2.12) wird *Autoregressiver-Integriert-Moving-Average-Prozess der Ordnung (p, d, q)* oder auch verkürzt ARIMA(p, d, q)-Prozess genannt, wobei die Ordnung d die benötigte Anzahl an Differenzenbildung angibt, damit das Modell stationär wird. Damit bildet es eine Verallgemeinerung des ARMA(p, q)-Prozess, da bei letzterem die Ordnung d null beträgt.⁵

2.4 Saisonalität in ARIMA-Modellen

Wirken saisonale Effekte auf eine Zeitreihe, hängen die betrachteten Werte nicht nur von den unmittelbar vorherigen ab, sondern stehen auch im engen Zusammenhang mit einem Saisonzyklus s . Der aktuelle Wert y_t bestimmt sich dann nicht nur durch die Werte aus der nahen Vergangenheit y_{t-1}, y_{t-2}, \dots , sondern auch durch die vergangenen Werte im Saisonzyklus y_{t-s}, y_{t-2s}, \dots .

Ein ARIMA(P, D, Q)-Prozess, indem ausschließlich saisonale Abhängigkeiten betrachtet werden, kann wie folgt modelliert werden:

$$\phi(B^s)(1 - B^s)^D y_t = \theta(B^s)u_t. \quad (2.13)$$

⁵In einem Modell mit Interzept $\alpha_0 \neq 0$ wird nach Differenzenbildung der Interzept eliminiert, wodurch dieselbe Gleichung für diese Version gilt: $\tilde{\alpha}(B)\tilde{y}_t = \alpha(B)(1 - B)^d y_t = \beta(B)\epsilon_t$ mit $\tilde{y}_t = y_t - \alpha_0$ (vgl. Box and Jenkins 1976).

B^s beschreibt die Verschiebung um eine volle Saison. Liegen beispielsweise Monatsdaten vor, beträgt $s = 12$ und mit B^{12} wird die Zeitreihe um ein Jahr verschoben, um Monatseffekte zu berücksichtigen: $B^{12}y_t = y_{t-12}$. Dabei sind $\phi(B^s)$ und $\theta(B^s)$ die Polynome des AR(P)- bzw. des MA(Q)-Teils. D gibt den Grad der Differenzenbildung an, bis der Prozess stationär ist.

In einem vollständigen saisonalen Modell wird dem Störterm u_t kein weißes Rauschen unterstellt, sondern er wird von den vergangenen Werten abhängig und damit durch einen ARIMA(p, d, q)-Prozess modellierbar sein:

$$\alpha(B)(1 - B)^d u_t = \beta(B)\epsilon_t.$$

ϵ_t wird nun wieder unterstellt, weißes Rauschen zu sein. Wird die Gleichung in (2.13) und für u_t aufgelöst, ergibt sich das Gesamtmodell:

$$\alpha(B)(1 - B)^d \phi(B^s)(1 - B^s)^D y_t = \beta(B)\theta(B^s)\epsilon_t. \quad (2.14)$$

Das Modell (2.14) wird dann *multiplikatives saisonales ARIMA-Modell der Ordnung $(p, d, q) \times (P, D, Q)$ (mit Saisonlänge s)* genannt (vgl. Schlittgen and Streitberg 2001, S. 138f.).

3 Methodik der Modellanpassung

Ein bedeutendes praktisches Problem bei der Anpassung von ARIMA-Modellen auf gegebene Zeitreihendaten besteht darin, das geeignete Modell zu finden. Der klassische Box-Jenkins-Ansatz sieht es vor, bestimmte Eigenschaften der empirischen Zeitreihe mit denen der theoretischen Modelle abzugleichen. Nachdem die Modellordnungen bestimmt wurden, können die Parameterwerte geschätzt werden. In der automatischen, computergestützten Analyse werden dagegen iteriert Modellordnungen bestimmt, Schätzer berechnet und Modelldiagnosewerte abgeglichen, über welche sich das auf die Daten am besten passende Modell finden lässt.

Die einzelnen Schritte der klassischen Modellidentifikation sollen in diesem Teil erläutert werden. Ebenfalls werden das Maximum-Likelihood-Verfahren und die bedingte Regression beschrieben, mit derer sich die optimalen Parameterschätzer finden lassen.

Zuletzt wird der Likelihood-Quotienten-Test vorgestellt, mit dessen Hilfe man unter bestimmten Bedingungen Aussagen über die Parameterwerte treffen kann.

3.1 Transformationen zur Stationarisierung

Im ersten Schritt zur Modellbildung soll überprüft werden, ob bei der betrachteten Zeitreihe Stationarität vorliegt. Gegebenenfalls muss die Zeitreihe durch geeignete Transformationen stationarisiert werden.

Ist die Varianz einer beobachteten Zeitreihe instationär insofern, dass die Varianz mit dem Erwartungswert ansteigt, ist eine Transformation über Logarithmenbildung wie in Abschnitt 2.3.2 beschrieben die üblichste Methode zur Varianzstabilisierung. Eine Verallgemeinerung für Transformationen zur Varianzstabilisierung bildet die Klasse der Box-Cox-Transformationen, auf die z.B. in Schlittgen and Streitberg 2001 (S. 102f.) näher eingegangen wird.

Im Allgemeinen ist bei Zeitreihen mit stochastischem Trend die Mittelwertstationarität nicht gegeben. Um die Differenzordnung d eines $\text{ARIMA}(p, d, q)$ -Prozesses objektiver bestimmen zu können, sind Informationen nützlich, die aus *Einheitswurzeltests* gewonnen wurden. Bei einem solchen Test werden die Lösungen der charakteristischen Gleichung eines $\text{AR}(p)$ -Prozesses geschätzt. Dabei wird ausgenutzt, dass Lösungen des Polynoms $\tilde{\alpha}(B)$ auf dem Einheitskreis liegen, wenn ein Prozess über Differenzenbildung stationarisiert werden kann (siehe Abschnitt 2.3.2). Für nähere Informationen sei z.B. auf Assenmacher 2002 (S. 227ff.) verwiesen.

Beim augmentierten Dickey-Fuller-Test (ADF-Test) wird auf die Nullhypothese von Nichtstationarität getestet. Dabei wird für folgendes Regressionsmodell

$$y_t - y_{t-1} = \alpha y_{t-1} + \pi_1(y_{t-2} - y_{t-1}) + \dots + \pi_k(y_{t-k} - y_{t-k+1}) + \epsilon_t$$

α über die Kleinst-Quadrate-Methode als $\hat{\alpha}$ geschätzt, wobei die Anzahl k der betrachteten zeitlichen Abstände (der Lags) häufig auf 3 gesetzt und $\epsilon_t \sim i.i.d N(0, \sigma^2)$ unterstellt wird (vgl. Hyndman and Athanasopoulos 2014 und Assenmacher 2002, S. 231f.).⁶ Ist $\hat{\alpha} = 0$, dann liegt mindestens eine Lösung der charakteristischen Gleichung auf dem Einheitskreis und es muss mindestens einmal differenziert werden. Für den alternativen Fall $\hat{\alpha} < 0$ kann die Nullhypothese widerlegt werden und die Reihe ist bereits stationär.

Zur intuitiven Interpretation soll der Test für $k = 1$ betrachtet werden:

$$y_t - y_{t-1} = \alpha y_{t-1} + \epsilon_t. \quad (3.1)$$

Für $\alpha = 0$ handelt es sich bei 3.1 um einen nicht stationären Prozess, der, nach sukzessivem Einsetzen für vergangene Perioden, auch wie folgt geschrieben werden kann (vgl. Schlittgen and Streitberg 2001, S. 96):

$$\tilde{y}_t = \sum_{s=1}^t \epsilon_s. \quad (3.2)$$

Die Nichtstationarität hierbei wird schnell ersichtlich, wenn die Varianz des Prozesses betrachtet wird: $Var(\tilde{y}_t) = Var(\sum_{s=1}^t \epsilon_s) = \sum_{s=1}^t Var(\epsilon_s) = t\sigma_\epsilon^2$. Die Varianz des Prozesses ist also zeitabhängig.

Nach Berechnung der Teststatistik $DF_t = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\sigma}_\alpha}$, können die kritischen Werte bestimmt werden. Allerdings ist die Teststatistik nicht einmal asymptotisch t-verteilt, weswegen die kritischen Werte aus Simulationsstudien mit unterschiedlichen Stichprobenumfängen stammen (vgl. Assenmacher 2002, S. 230f.). Ist DF_t kleiner als der kritische Wert, wird die Nullhypothese mindestens einer Einheitswurzel abgelehnt.⁷ Im Allgemeinen sollte der ADF-Test ebenfalls auf die bereits einmal differenzierte Zeitreihe angewandt werden, um durch Ablehnung der Nullhypothese eine höhere Differenzordnung $d > 1$ auszuschließen. Der ADF-Test ist mit einigen Defiziten behaftet, wobei ein großes Problem die geringe Trennschärfe zwischen Annahme und Ablehnung der Nullhypothese ist. Aus diesem Grund bietet es sich an, einen Test mit umgekehrter Fragestellung durchzuführen. Beim Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin-Test (KPSS-Test) wird die Nullhypothese getestet, dass y_t stationär ist. Ablehnung der Nullhypothese ist dann ein Indiz dafür, dass Differenzen gebildet werden sollten (vgl. Schlittgen and Streitberg 2001).

⁶Die obige Regressionsgleichung ist ebenfalls mit einem deterministischen Trend der Form $a + bt$ erweiterbar, sofern derartige Annahmen getroffen werden (vgl. für die veränderten Werte z.B. Von der Lippe 2015). In R wird die erweiterte Gleichung verwendet (siehe Trapletti 2015).

⁷Es existiert eine alternative Teststatistik, zu der sich die kritischen Werte ebenfalls unterscheiden (vgl. Von der Lippe 2015). Da die R-Dokumentation angibt, die t-Statistik zu verwenden (siehe Trapletti 2015), ist nur diese für den praktischen Teil relevant.

3.2 Modellidentifikation

Eine große Schwierigkeit in der praktischen Anwendung von ARIMA-Modellen ist die korrekte Spezifikation der Modellordnungen. Ist die Integrationsordnung d zur Stationarisierung bestimmt worden, müssen noch die ARMA-Ordnungen p und q gefunden werden. Unter dem klassischen Box-Jenkins-Ansatz (vgl. Box and Jenkins 1976, S. 174ff.) werden zwei Funktionen einer Zeitreihe, nämlich die Autokorrelationsfunktion sowie die partielle Autokorrelationsfunktion, ausführlich untersucht. Deswegen sollen diese zunächst erläutert werden.

Die *Autokorrelationsfunktion* (ACF) $\rho(k)$ eines stationären Prozesses sei, wie oben in Teil 2.3, definiert als eine Funktion, durch welche sich der Zusammenhang zwischen den beobachtbaren Werten in Abhängigkeit von $k = s - t$, also ihrem zeitlichen Abstand (ihrem Lag) voneinander, bestimmen lässt:

$$\rho(k) := \rho(s, t) = \frac{\mathbb{E}([Y_s - \mu_Y][Y_t - \mu_Y])}{\sigma_Y^2} = \frac{\gamma(s, t)}{\gamma(0)} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}. \quad (3.3)$$

Die grafische Darstellung der aus den beobachteten Daten gewonnenen *empirischen ACF* $\hat{\rho}(k)$ wird Korrelogramm genannt (vgl. Schlittgen and Streitberg 2001, S. 7). Für die ACF besteht das Problem, dass z.B. y_t und y_{t-2} automatisch eine Korrelation aufweisen, sobald eine Korrelation zwischen y_t und y_{t-1} besteht. Bei der *partiellen Autokorrelationsfunktion* (PACF) eines stationären Prozesses wird die Autokorrelation für einen Lag k bestimmt, wobei jedoch auch die Korrelation berücksichtigt wird, die zwischen den Werten aufgrund von Lags niedrigerer Ordnung herrscht. Mit anderen Worten definiert die partielle Korrelation die Korrelation zweier $s - t = k$ entfernt liegenden Zufallsvariablen Y_s und Y_t aus dem Prozess, bereinigt um den Zusammenhang der dazwischenliegenden Zufallsvariablen Y_u mit $t < u < s$. Formell wird die *empirische PACF* $\hat{\pi}(k)$ wie folgt angegeben (vgl. Hyndman and Athanasopoulos 2014 sowie für die genaue Herleitung Schlittgen and Streitberg 2001, S. 194ff.):

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(k) &:= \hat{\alpha}_k, \text{ dem Schätzer für } \alpha_k \text{ aus der Regression} \\ y_t &= \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_k y_{t-k} + u_t. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Typischerweise besitzen die ACF und PACF von AR(p)- bzw. MA(q)-Prozessen bestimmte Charakteristika, welche die Identifikation der (reinen) Prozesse in empirischen Zeitreihen erleichtern.

Für einen stationären AR(p)-Prozess zeigen Box and Jenkins 1976 (S. 54f.), dass die ACF unendlich ist und für reelle Lösungen der charakteristischen Gleichung als gedämpfte Exponentialfunktion bzw. für komplexe Lösungen als gedämpfte Sinus-Wellen auftritt. Dagegen ist die PACF-Funktion ungleich null für $k \leq p$ und null für $k > p$. Sie bricht also deutlich nach dem p -ten Lag ab. Die empirische PACF-Funktion kann über einen

Kleinste-Quadrate-Ansatz geschätzt werden und entspricht den unter einem solchen Ansatz geschätzten Koeffizienten eines $AR(p)$ -Prozesses. Die geschätzten Werte $\hat{\pi}(k)$ sind für genügend lange Zeitreihen der Länge N unter Annahme eines $AR(p)$ -Prozesses für $k > p$ unabhängig normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\frac{1}{\sqrt{N}}$ (vgl. Box and Jenkins 1976, S. 178). Auch für die empirisch geschätzten Autokorrelationen $\hat{\rho}(k)$ lässt sich unter der Annahme eines $AR(p)$ -Prozesses für $k > p$ die Varianz schätzen. Daraus bilden sich Schätzintervalle, die ebenfalls Informationen über das zu identifizierende Modell geben können.

Ein $MA(q)$ -Prozess besitzt in Bezug auf die ACF und die PACF genau umgekehrte Eigenschaften. Die Kovarianzstationarität eines $MA(q)$ -Prozesses (siehe Abschnitt 2.3.1) zeigte bereits, dass die Autokorrelation $\rho(k) \neq 0$ für $k \leq q$ und $\rho(k) = 0$ für $k > q$ ist. Damit bricht hier die ACF nach dem q -ten Lag ab, wenn ein $MA(q)$ -Prozess vorliegt. Dagegen wird die PACF nicht unbedingt null, analog zur ACF eines $AR(p)$ -Prozesses (vgl. Box and Jenkins 1976, S. 175).

Die Spezifikation eines $ARMA(p, q)$ -Modells erweist sich meist als problematischer. Generell sollte ein gemischtes Modell in Betracht gezogen werden, wenn sowohl ACF als auch PACF auf unendlicher Zeit als Mischung gedämpfter Sinuswellen und exponentiellen Abstiegs verlaufen. Bis zum q -ten Lag bestimmt sich die ACF sowohl aus dem MA- wie auch aus dem AR-Teil. Ab dem q -ten Lag hängen die Autokorrelationen nur noch von den AR-Koeffizienten ab und die ACF verhält sich ab da wie bei einem $AR(p)$ -Prozess. Die PACF verhält sich analog ab dem p -ten Lag nur noch wie die eines $MA(q)$ -Prozesses (vgl. Schlittgen and Streitberg 2001, S. 305). Aufgrund der Dualität zwischen $AR(p)$ - und $MA(q)$ -Prozess in Bezug auf die ACF und PACF wird für höhere Modellordnung die Spezifikation zunehmend schwerer. In der ökonomischen Praxis werden allerdings meistens Modelle verwendet, bei denen die Summe der Ordnungen $p+q \leq 2$ ist (vgl. Schlittgen and Streitberg 2001, S.305). Bei Box and Jenkins 1976 (S. 178ff.) finden sich Veranschaulichungen und Berechnungen für die Eigenschaften solcher Modelle mit niedriger Ordnung. Zusammenfassend gelten als identifizierende Eigenschaften

- für einen $AR(p)$ -Prozess: die ACF verläuft gedämpft unendlich und die PACF bricht nach dem p -ten Lag ab;
- für einen $MA(q)$ -Prozess: die ACF bricht nach dem q -ten Lag ab und die PACF verläuft gedämpft unendlich;
- für einen $ARMA(p, q)$ -Prozess: die ACF verhält sich nach dem q -ten Lag wie bei einem $AR(p)$ -Prozess und die PACF nach dem p -ten Lag wie bei einem $MA(q)$ -Prozess.

Um die Modellordnung eines multiplikativen saisonalen ARIMA-Modells der Ordnung $(p, d, q) \times (P, D, Q)$ bestimmen zu können, hilft ebenfalls ein Blick auf die ACF und PACF.

Wird ein Saisonzyklus der Länge s vermutet, muss verstärkt auf die ACF- und PACF-Werte bei den Lags $s, 2s, 3s, \dots$ Acht gegeben werden. Wenn die Werte im Zusammenhang zu denen vorheriger Saisons stehen, sollten einige Modellordnungen des saisonalen Teils praktisch per Definition ungleich null für eine erkennbare Saisonkomponente sein. Typischerweise zeigen die Lags $s, 2s, 3s, \dots$ konsistent hohe und über die Zeit persistente Werte, wenn für den saisonalen Teil Differenzen gebildet werden sollten (vgl. Nau 2015).⁸ Nach saisonaler Differenzenbildung sollten sich die ACF bzw. PACF für saisonale $AR(P)$ - bzw. $MA(Q)$ -Prozesse ähnlich verhalten wie bei den allgemeinen Modellen. Der Unterschied besteht lediglich darin, dass die Muster für Lags im Saisonzyklus $s, 2s, 3s, \dots$ auftreten. Im Allgemeinen sind in der Praxis auch hier meist Modelle niedrigerer Ordnungen angebracht. Nau (2015) warnt vor den Gefahren zu hoher Ordnungen in (saisonalen) ARIMA-Modellen, da sich Effekte der Terme gegenseitig aufheben können. Insbesondere sollte die saisonale Differenz bei ökonometrischen Zeitreihen nicht $D > 1$ gesetzt werden.

3.3 Schätzung der Modellparameter

Als Schätzverfahren für die genauen Parameter eines $ARMA(p, q)$ sollen der *Maximum-Likelihood-Ansatz* (ML) und die *Bedingte-Kleinst-Quadrat-Methode* (CLS von conditional least squares) kurz vorgestellt werden⁹. Beide Verfahren sind in der Praxis geläufig, wobei auch ein Mix der Methoden üblich ist. So werden in der `arma`-Funktion unter R standardmäßig zunächst Startwerte unter der CLS-Methode gesucht und im Nachhinein als ML-Schätzwerte feinkalibriert (siehe R Dokumentation Team 2015).

Aus einer Likelihood-Funktion der Form

$$L(\vartheta|y) := p(y|\vartheta), y \text{ fest}$$

lassen sich Rückschlüsse darauf ziehen, mit welchem Parameter ϑ das gegebene Ereignis y am wahrscheinlichsten aufgetreten ist. Unter dem Maximum-Likelihood-Ansatz wird dann als Schätzer für den wahren unbekannten Parameterwert derjenige gewählt, welcher die Likelihood-Funktion maximiert und damit unter gegebenen Beobachtungen am plausibelsten erscheint. Dazu werden Verteilungsannahmen über die Parameter benötigt.

In der Zeitreihenanalyse sind die Beobachtungen alle einfließenden Werte $\mathbf{y} = y_t$ einer Zeitreihe mit Länge N . Der Parametervektor $\boldsymbol{\vartheta} = (\sigma_\epsilon^2, \alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q)$ beinhaltet sämtliche zu schätzenden $p + q + 1$ unbekannten Parameter (hier für eine, z.B. durch

⁸Für eine objektivere Betrachtung existieren auch Einheitswurzeltests für die saisonalen Komponenten, die in R als Funktion `nsdiffs` zur automatischen Bestimmung der saisonalen Differenzordnung über Einheitswurzeltests implementiert sind. Details finden sich unter der Dokumentation des entsprechenden Pakets bei Hyndman and Athanasopoulos (2014).

⁹Details zu den Herleitungen finden sich z.B. bei Schlittgen and Streitberg (2001) (S. 268ff., S. 280ff.)

Differenzenbildung auf 0 zentrierte, Zeitreihe, siehe 2.2.2). Für \mathbf{y} wird üblicherweise eine multivariate Normalverteilung angenommen. In diesem Fall gilt für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}(\mathbf{y}) = \mu \mathbf{1} = 0$$

und für die Varianz

$$\text{Var}(\mathbf{y}) = \sigma_\epsilon^2 \mathbf{\Sigma} = \sigma_\epsilon^2 = \begin{bmatrix} \gamma_0/\sigma_\epsilon^2 & \dots & \gamma_{N-1}/\sigma_\epsilon^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{N-1}/\sigma_\epsilon^2 & \dots & \gamma_0/\sigma_\epsilon^2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{\Sigma}$ lässt sich abspalten und hängt dann nur noch von den ARMA-Parameter $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1, \dots, \alpha_p$ bzw. $\boldsymbol{\beta} = \beta_1, \dots, \beta_q$ ab. Zur Vereinfachung der Berechnungen wird die logarithmierte Likelihood-Funktion verwendet, da die Maximalstelle nach der Logarithmierung dieselbe bleibt. Für ein ARMA-Modell lautet die Loglikelihood-Funktion wie folgt:

$$\tilde{l}(\vartheta|y) = \ln L(\vartheta|y) = -\frac{N}{2} \ln 2\pi\sigma_\epsilon^2 - \frac{1}{2} \ln \det \mathbf{\Sigma} - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \mathbf{y}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{y},$$

Löst man die ML-Gleichungen für σ_ϵ^2 , ergibt sich als (korrigierter) ML-Schätzer $\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{\mathbf{y}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{y}}{N}$. Eingesetzt, erhält man die *konzentrierte Loglikelihood-Funktion*, die ausschließlich von den ARMA-Parametern $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ abhängt:

$$\tilde{l}(\vartheta|y) = \tilde{l}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}|y) = -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln \frac{\mathbf{y}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{y}}{N} - \frac{1}{2} \ln \det \mathbf{\Sigma} - \frac{N}{2}.$$

Da konstante Terme bei der Maximierung der Funktion wegfallen, kann die konzentrierte Loglikelihood-Funktion zusammengefasst werden:

$$l(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}|y) = -\frac{N}{2} \left(\frac{1}{N} \ln \det \mathbf{\Sigma} + \ln \frac{\mathbf{y}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{y}}{N} \right). \quad (3.5)$$

Bei der Maximierung von (3.5) kann dann ein Gitter über ausgewählte Parameterpunkte gezogen werden und darüber die Maximalstelle gesucht werden.

Der Kleinste-Quadrate-Ansatz basiert auf der Überlegung, Parameterwerte zu finden, sodass die quadrierten Residuen, durch die sich ein geschätztes Modell von den wirklichen Werten unterscheidet, minimiert werden. Für ARMA-Prozesse ergibt sich unter dem CLS-Ansatz folgendes Minimierungsproblem:

$$\mathbf{y}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{y} = \sum_{t=1}^N \hat{\epsilon}_t^2 \stackrel{!}{=} \min,$$

wobei $\hat{\epsilon}_t$ als die Realisationen der Schocks ϵ_t gesehen werden können, welche die beobachteten Zeitreihenwerte \mathbf{y} erzeugen:

$$\hat{\epsilon}_t = y_t - \hat{y}_t = y_t + \beta_1 \hat{\epsilon}_{t-1} + \dots + \beta_q \hat{\epsilon}_{t-q} - \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p}.$$

Die Werte $\hat{\epsilon}_t$ können sukzessiv berechnet werden.

Über die ML-Methode und ebenso über den CLS-Ansatz geschätzte Parameter $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ konvergieren unter den oben erläuterten Modellbedingungen für ARMA(p, q)-Prozesse mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen die wahren Werte α, β (vgl. Schlittgen and Streitberg 2001). Zusätzlich soll gelten, dass das Modell weder unter-, noch überidentifiziert ist, d.h.:

- die charakteristischen Polynome $\alpha(z)$ und $\beta(z)$ verfügen über keine gemeinsamen Nullstellen. Eine Unteridentifikation würde ansonsten dazu führen, dass gemeinsame Faktoren aus der ARMA-Prozessgleichung (2.8) herausgekürzt werden könnten.
- Ebenfalls soll $\alpha_p \neq 0$ und $\beta_q \neq 0$ gelten. Durch eine Überidentifikation könnte ansonsten auch ein ARMA($p-1, q$)- bzw. ARMA($p, q-1$)-Modell statt des ARMA(p, q)-Modells angenommen werden.

Liegt ein Regressionsmodell mit ARMA-Störterm und ohne Interzept in der Form $y_t = \pi_1 x_t + \beta(B)\alpha(B)^{-1}\epsilon_t$ (vgl. Abschnitt 2.2.3) vor, muss ein zusätzlicher Parameter π_1 bestimmt werden. Als Loglikelihood-Funktion erhält man die folgende Darstellung (für Details siehe Johansen et al. 2012):

$$l(\vartheta, \pi_1 | y) = -\frac{N}{2} \left[\frac{1}{N} \ln \det \Sigma + \ln \sigma_\epsilon^2 + \frac{1}{N\sigma_\epsilon^2} (\mathbf{y} - \pi_1 \mathbf{x})' \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \pi_1 \mathbf{x}) \right]$$

mit $\sigma_\epsilon^2 = \mathbf{y}' \Sigma^{-1} \mathbf{y}$.

Diese muss analog zu oben maximiert werden.

3.4 Modelldiagnose

Nachdem die Parameter für eine über die ACF/PACF bestimmte Ordnung geschätzt wurden, liegen möglicherweise mehrere Modelle für eine beobachtete Zeitreihe y_t vor. In diesem Fall können diagnostische Tests verwendet werden, um das geeignetste Modell auszuwählen. Wichtigste Modell-Selektionskriterien sind dabei das (*korrigierte*) Akaike Informationskriterium, abgekürzt AIC bzw. AICc für das korrigierte Kriterium, sowie das Bayessche Informationskriterium (BIC). Die grundlegende Idee der Diagnose über die Informationskriterien ist es, für jedes Modell den Wert der Loglikelihood-Funktion $l(\vartheta | y)$ eines Modells auszugeben und mit denen der anderen Modelle zu vergleichen. Dabei handelt es sich bei ϑ um den jeweiligen Maximum-Likelihood-Schätzer. Das Modell mit der höchsten Likelihood erscheint demzufolge als das plausibelste. Wie z.B. bei Schlittgen and

Streitberg 2001 (S. 334) gezeigt wird, steigt mit zunehmender Anzahl an Modellparametern die Likelihood, zugleich werden dabei jedoch die Schätzungen instabiler. Daher wird in den Informationskriterien eine höhere Anzahl an Parametern „bestraft“.

Die Informationskriterien werden wie folgt angegeben:

- $AIC(p, q) := \ln \hat{\sigma}_{p,q}^2 + 2 \frac{p+q}{N};$
- $BIC(p, q) := \ln \hat{\sigma}_{p,q}^2 + \frac{(p+q) \ln N}{N},$

wobei es sich bei $\hat{\sigma}_{p,q}^2$ um die geschätzte Varianz der Residuen $(\mathbf{x}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{x})/N$ handelt. Die Likelihood wird maximiert für dasjenige ARMA(p, q)-Modell, welches das zu betrachtende Informationskriterium minimiert. An den Funktionen erkennt man, dass mit steigender Modellparameteranzahl p, q AIC bzw. BIC größer werden. Da das AIC dennoch dazu tendiert, Modelle mit gutem Fit, aber hoher Parameteranzahl zu wählen, eignet sich, vor allem für kurze Zeitreihen, das AICc-Kriterium, wobei sich dessen Wert mit steigendem Datenumfang an den des AIC annähert (vgl. Hyndman 2015).

3.5 Modellvergleich

Liegt ein Modell vor, das einen Sonderfall zu einem allgemeinerem Modell bildet, kann über einen *Likelihood-Quotienten-Test* geprüft werden, ob das allgemeinere Modell signifikant besser für die Daten angepasst ist als das sogenannte restringierte Modell. Beispielsweise kann das reguläre ARMA-Modell (2.8) als ein Regressionsmodell mit ARMA-Störterm der Form (2.10) gesehen werden, in dem Interzept π_0 und der Regressorkoeffizient π_1 beide null sind. Über den Test kann dann herausgefunden werden, wie stark der Einfluss der herausgenommenen Variablen ist.

Der Likelihood-Quotient bezeichnet das Verhältnis zwischen der maximierten Likelihood $L(\hat{\vartheta}_0|y)$ des (geschätzten) Spezialfalls und der des allgemeinen Modells $L(\hat{\vartheta}|y)$, also $\Lambda = L(\hat{\vartheta}_0|y)/L(\hat{\vartheta}|y)$ (vgl. NIST/SEMATECH 2015). Unter der Nullhypothese stammt ϑ_0 aus der wahren Parametermenge Θ_0 , welche eine derartige Teilmenge der allgemeineren Parametermenge Θ ist, dass ϑ_0 immer noch genauso gut die beobachteten Werte y erzeugen kann. Die Nullhypothese kann dann nicht verworfen werden, wenn der Likelihood-Quotient nahe an 1 ist. Praktisch bedeutet das, eine oder mehrere Restriktionen auf die Parametermenge haben kaum Auswirkungen auf die Wahrscheinlichkeit (bzw. genauer die Likelihood), mit der die beobachteten Werte von den Maximum-Likelihood-Schätzern erzeugt werden.

Für große Stichprobenumfänge ist unter Gültigkeit der Nullhypothese der Wert

$$-2\log(\Lambda) = -2[l(\hat{\vartheta}_0|y) - l(\hat{\vartheta}|y)] \quad (3.6)$$

approximativ χ^2 -verteilt, mit der Anzahl an Restriktionen k als Anzahl der Freiheitsgrade (vgl. Wilks 1938). Im obigen Beispiel wäre $k = 2$.

Über einen Chi-Quadrat-Test kann dann die Nullhypothese geprüft werden. Ist der Prüf-
wert (3.6) unter gegebenem Signifikanzniveau höher als der kritische Wert der Chi-Quadrat-
Verteilung, dann ist der Unterschied zwischen restringiertem und allgemeinem Modell
signifikant. Die Alternativhypothese, mit der Behauptung, das restringierte Modell sei
ähnlich gut wie das allgemeine, wird dann angenommen.

4 Analyse der Daten

In den vorherigen Abschnitten wurde vor allem auf die Besonderheiten der ARIMA-Modelle eingegangen. Für die Zeitreihenanalyse von Wirtschaftsdaten werden diese Modelle häufig verwendet. Nun soll aber die Modellierung der irregulären Einflüsse durch das Chinesische Neujahr mit beachtet werden, indem ein Regressionsmodell mit ARIMA-Störterm auf reale Daten angewandt wird.

Genau genommen findet die Datenanalyse unter Verwendung der Methoden von oben in vier Schritten statt: Zunächst werden die Daten inflations- und trendbereinigt. Im nächsten Schritt sollen die ARIMA-Modellordnungen getrennt für ein Modell ohne bzw. für diejenigen mit Feiertagsregressor bestimmt werden. Danach werden die Parameterwerte der Modelle geschätzt und die Diagnosewerte miteinander verglichen. Im letzten Schritt erfolgt ein Likelihood-Quotienten-Test, um statistische Aussagen darüber treffen zu können, ob ein Weglassen des Regressors möglich ist, ohne die Anpassungsgüte der Modelle zu verschlechtern.

4.1 Operationalisierung

Für die Analyse soll den vorliegenden Daten ein Modell unterstellt werden, welches Bell and Hillmer (1983) spezifiziert haben und in denen die zuvor erläuterten Werkzeuge praktische Anwendung finden. Bell und Hilmer schlagen für die Zeitreihenanalyse vor, statt puren Regressions- oder ARIMA-Modellen gemischte Modelle zu verwenden, um irreguläre Kalendereinflüsse einfließen lassen zu können. Zur Veranschaulichung schließen sie zwei Arten von Effekten in ein monatliches ARIMA-Modell ein, „Trading Day Effects“ (Effekte aufgrund der unterschiedlichen Zusammenstellung der Wochentage in einem Monat) sowie „Holiday (Easter) Day Effects“ (Osterfeiertagseffekte). Das entsprechende Modell ohne „Trading Day Effects“ besteht aus einem ARIMA-Teil η_t und einem Regressionsteil E_t , der die Feiertagseffekte beinhaltet:

$$Y_t = E_t + \eta_t$$

mit $\alpha(B)(1-B)^d\phi(B^s)(1-B^s)^D\eta_t = \beta(B)\theta(B^s)\epsilon_t, \epsilon_t \sim i.i.d N(\mu, \sigma_\epsilon^2)$. (4.1)

Die funktionelle Form von E_t wird ebenfalls von Bell und Hilmer erläutert. Unter der Annahme einer für alle Feiertage konstanten Effektstärke π^{10} soll gelten:

$$E_t = \pi \frac{\sum_{i=1}^{\tau} h(i, t)}{\tau}, \quad (4.2)$$

wobei $h(i, t)$ angibt, ob der i -te Tag des neuen Jahres nach chinesischem Kalender in den Monat t fällt. In diesem Fall ist $h(i, t) = 1$, andernfalls $h(i, t) = 0$. Damit gibt $\frac{\sum_{i=1}^{\tau} h(i, t)}{\tau}$

¹⁰Bell und Hilmer zeigen empirisch, dass diese Annahme zumindest für das Beispiel von Verkaufserlösen eines Schuhladens gerechtfertigt ist, siehe dazu Bell and Hillmer 1983, S. 532f.

an, wie viele Tage nach dem Chinesischen Neujahr anteilig in den Monat t fallen. τ spezifiziert, für wie viele Tage der Feiertagseffekt betrachtet wird. Mit $\sum_{i=1}^{\tau} h(i, t) = \tau_t$ sei der Sachverhalt vereinfacht notiert als:

$$E_t = \pi \frac{\tau_t}{\tau}. \quad (4.3)$$

In (4.1) eingesetzt und umgestellt, ergibt sich schließlich für das endgültige Modell:

$$Y_t = \pi \frac{\tau_t}{\tau} + \frac{\beta(B)\theta(B^s)}{\alpha(B)\phi(B^s)} [(1-B)^d(1-B^s)^D]^{-1} \epsilon_t, \epsilon_t \sim i.i.d. N(\mu, \sigma_\epsilon^2). \quad (4.4)$$

Das Modell entspricht dem der Regression mit ARMA-Störterm aus 2.2.3 mit regulären sowie saisonalen Differenzoperatoren.

Um den Feiertagseffekt durch das Chinesische Neujahr in den taiwanesischen Daten zu untersuchen, sollen Modelle für unterschiedliche Effektlängen $\tau \in \{0, 3, 7, 14\}$ verglichen werden.¹¹ Der Regressionskoeffizient π lässt sich auch als Semi-Elastizität interpretieren; π ist dann der Anteil, um den sich der Exportwert für einen gegebenen Monat ändert, würden sämtliche Tage des Chinesischen Neujahrs in diesen Monat fallen. Für größere Werte von τ verschieben sich Effekte des Chinesischen Neujahrs allerdings auch in den Folgemonat. Über die AIC/BIC soll ermittelt werden, ob sich ein Modell mit Berücksichtigung der Feiertagseffekte tatsächlich besser für die Daten eignet und wenn ja, über wie viele Tage sich der Effekt zieht.

4.2 Datenherkunft und -aufbereitung

Die exakten Daten, auf die das Chinesische Neujahr jedes Jahr fällt, sind im R-Paket „seasonal“ enthalten. Dieses enthält zusätzlich die Funktion `genhol`, mit der ein Feiertagseffekt automatisch berechnet werden kann. Der Effekt lässt sich aber auch gut manuell implementieren, was hier geschehen ist, um mit der von Bell und Hilmer beschriebenen Methode konsistente Regressorwerte zu generieren.

Die Betrachtung der Exportdaten Taiwans hat einige grundlegende Vorteile gegenüber Datenreihen anderer Länder, welche mitunter ebenfalls bis heute einen Lunisolar- oder Lunarkalender für ihre Feiertage verwenden. Zunächst sind die Daten für eine vergleichsweise lange Zeitspanne von über 30 Jahren monatlich verfügbar. Das Neujahrsfest gilt außerdem als wichtigster Feiertag in der Region, im Gegensatz zu beispielsweise Ostern in Europa und Nordamerika, weswegen ein deutlicher Effekt zu sehen sein müsste. Letztlich wäre zwar eine Betrachtung von Wirtschaftsdaten aus der Volksrepublik China interessant, jedoch werden in den monatlichen Daten des statistischen Büros die Zahlen für Januar und Februar zusammengefasst veröffentlicht, gerade um für den Neujahrseffekt auf-

¹¹Die Wahl fiel auf diese Werte von τ , da sie denen ähneln, die von Lin et al. (2002) in anderen Zeitreihen für einen Effekt nach dem Feiertag untersucht wurden, nämlich $\tau \in \{0, 3, 7, 15\}$. Dabei entspricht $\tau = 0$ einem herkömmlichen saisonalen ARIMA(p, d, q)-Modell ohne Regressor.

zukommen¹².

Die Exportwerte liegen als monatliche Gesamtwerte in US-Dollar vor und sollen daher noch inflationsbereinigt werden. Dazu wird ein Preisindex über die Exporte auf US-Dollar-Basis verwendet und die Datenreihe adjustiert, indem für jede Periode durch den Preisindex geteilt wird (vgl. Nau 2015: Inflation adjustment): $Realwert\ Exporte = Nominalwert\ Exporte / Preisindex$. Die Werte wurden vom statistischen Büro Taiwans veröffentlicht¹³. Beide Datenreihen beginnen im Januar 1981 und enden im Mai 2015. Die Zeitreihe *Realwert Exporte* enthält damit $N = 413$ bzw. nach Differenzenbildung $N = 412$ Datenpunkte. In Abbildung 1 links wird die Zeitreihe grafisch dargestellt. Offensichtlich nehmen die Varianzen der Werte mit dem Zeitverlauf zu, was auf ein multiplikatives Modell hinweist. Nach Logarithmieren der Werte ergibt sich ein gleichmäßigerer Verlauf, wie auf der rechten Seite abgebildet ist.

Auffällig ist zudem ein sichtbar positiver (deterministischer) Trend. Intuitiv liegt ein sol-

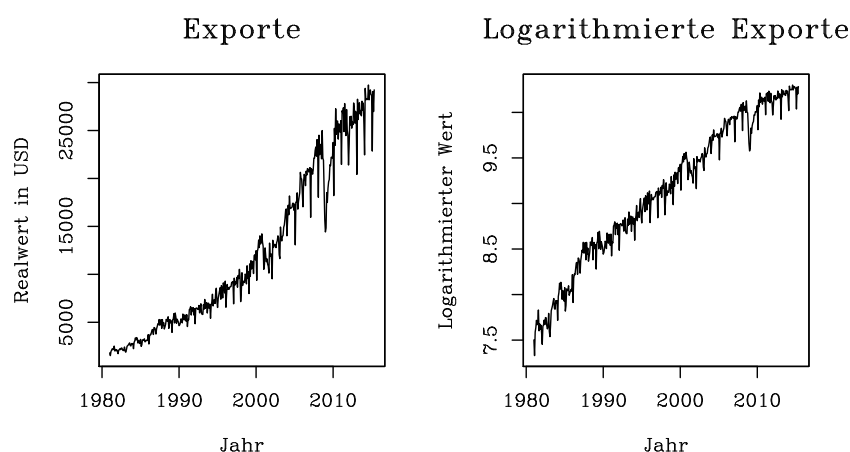


Abbildung 1: Plot der Realwerte (links) und logarithmierten Realwerte (rechts) der Exporte Taiwans in US-Dollar von Januar 1981 bis Mai 2015

cher auch nahe, da langfristig Output- und, aufgrund zunehmender Globalisierung, auch Exportwerte steigen. Aus diesem Grund wird ein linearer Trend $a + bt$ an die Zeitreihe angepasst und die Abweichungen der Werte von diesem betrachtet. Die geschätzten Koeffizienten können im Anhang unter Listing 1 nachvollzogen werden. In Listing 2 des Anhangs wurde zudem für die Residuen der linearen Trendregression bzw. der Abweichungen vom geschätzten Trend ein Durbin-Watson Test zum Lag 1 durchgeführt. Die Ergebnisse sprechen für autokorrelierte Störungen, die sich unter Umständen als stochastischer Prozess darstellen lassen. Als endgültige, mit dem Bell-Hilmer-Regressor und ARIMA-Modell zu untersuchende Zeitreihe erhält man also die *Abweichung der taiwanesischen Exporte*

¹²Vgl. National Bureau of Statistics of China, <http://data.stats.gov.cn/english/index.htm/>; letzter Zugriff am 06. Juli 2015)

¹³<http://statdb.dgbas.gov.tw/pxweb/dialog/statfile1L.asp>, Dokumentation verfügbar unter <http://eng.stat.gov.tw/>; letzter Zugriff am 06. Juli 2015

(*logarithmierter Realwert in US-Dollar*) vom langfristigen Trend, wie in Abbildung 2 dargestellt ist.

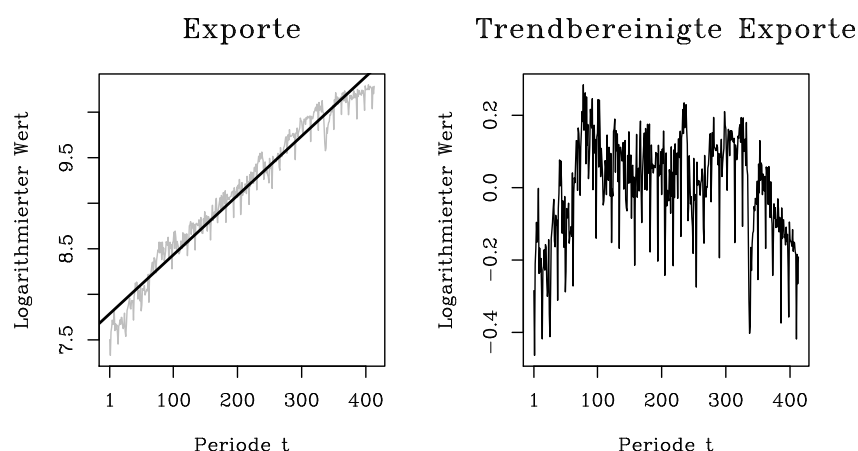


Abbildung 2: Plot der logarithmierten Werte mit angepasstem linearen Trend (links) und Abweichungen davon (rechts)

4.3 Modellidentifikation

Ausgehend von den bearbeiteten Daten wird zunächst ein reguläres ARIMA-Modell an die Werte angepasst. Im zweiten Teil soll dann der Feiertagsregressor mittels einer Regression mit ARIMA-Störterm einbezogen werden.

4.3.1 Identifikation eines ARIMA-Modells

Da die Möglichkeit besteht, dass die Zeitreihe auch nach Trendbereinigung immer noch nichtstationär ist, soll sie zunächst über einen augmentierten Dickey-Fuller Test geprüft werden. Bei dem ADF-Test liegt der p-Wert mit 0,1998 so hoch, dass bei einem Signifikanzniveau von 0,05 die Nullhypothese von Nichtstationarität nicht verworfen wird. Das Ergebnis wird von dem eines KPSS-Tests bestätigt, bei dem die Nullhypothese der Stationarität verworfen werden kann. Dies weist darauf hin, dass mindestens eine Einheitswurzel gegeben ist und die Zeitreihe über Differenzenbildung stationarisiert werden kann. Zur Probe werden die differenzierten Werte erneut auf Stationarität getestet. Der p-Wert des ADF-Tests 0,01 legt nahe, dass die Wahrscheinlichkeit eines solchen oder extremeren Ergebnisses unter der Nullhypothese von Nichtstationarität sehr gering ist und unter dem Signifikanzniveau von 0,05 liegt. Die Annahme von Stationarität nach einfacher Differenzenbildung wird vom Ergebnis des KPSS-Tests auf die differenzierten Werte unterstützt. Damit ist die Modellordnung $d = 1$ festgelegt. Die detaillierten Testergebnisse sind im Anhang unter 3 bzw. 4 angegeben.

Es liegt nahe, dass Exportzahlen starken jahreszeitlich bedingten Schwankungen unterliegen. Im nächsten Schritt soll ermittelt werden, ob die (differenzierte) Zeitreihe Merkmale aufweist, die eine saisonale Differenzenbildung nahelegen. Erste Erkenntnisse bringt ein Blick auf die Monatsdurchschnitte der Daten, die sich offensichtlich stark von Monat zu Monat unterscheiden (siehe Abbildung 3). Interessanterweise sind die Werte im Januar und Februar besonders niedrig, was ein Anzeichen für den später noch zu untersuchenden Neujahrseffekt ist.

Bei Betrachtung des ACF-Plots aus Abbildung 4 für die Exportwerte wird schnell er-

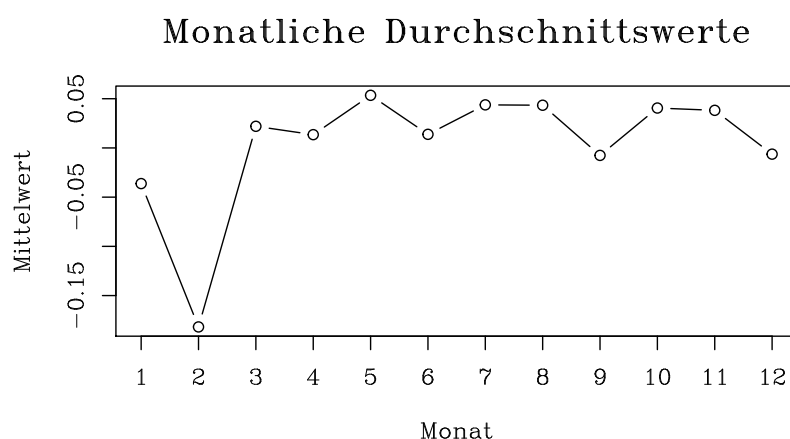


Abbildung 3: Plot der Monatsdurchschnitte der Exportdaten

sichtlich, dass ein saisonaler Zusammenhang bestehen muss, da die Autokorrelationen für Verschiebung um jeweils ein Jahr (bzw. für Lags 12, 24, 36) deutlich außerhalb der Konfidenzintervalle liegen. Da die Werte zumindest für die ACF nicht mit der Zeit abnehmen, liegt eine saisonale Differenzenordnung von $D = 1$ nahe.

Schließlich werden in Abbildung 5 die ACF und PACF nach allgemeiner sowie saisonaler Differenzenbildung gezeigt, welche für die Bestimmung der Ordnungen p, q, P, Q ausschlaggebend sind. In der PACF sind für die ersten zwei Lags deutliche Ausschläge und danach wellenartige Bewegungen erkennbar, was auf einen AR(2)-Prozess deuten könnte. Da allerdings auch die ACF nach dem Lag 1 abbricht, besteht die Möglichkeit eines ARMA(1,1)-Prozesses für den nichtsaisonalen Teil, sofern sich auf die üblichsten Fälle $p + q \leq 2$ beschränkt wird (siehe Abschnitt 3.2). Für die saisonalen Abstände (12., 24., 36. Lag) scheint die ACF nach dem 12.Lag abzubrechen und die PACF nimmt für diese Lags stetig ab, was für einen saisonalen MA(1)-Prozess spricht.

Insgesamt wird der Prozess anscheinend am besten durch ein saisonales ARIMA-Modell der Form $(2, 1, 0) \times (0, 1, 1)$ oder $(1, 1, 1) \times (0, 1, 1)$ mit einer Saisonlänge $s = 12$ modelliert, falls ein Modell ohne Regressor, bzw. mit $\tau = 0$, vorausgesetzt wird.

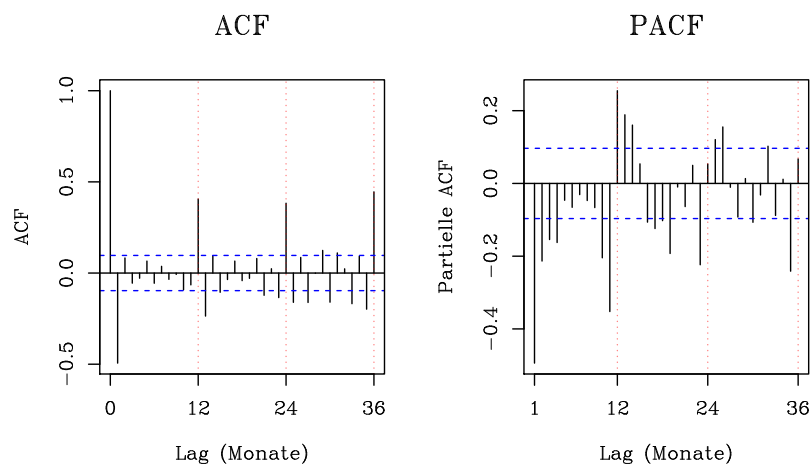


Abbildung 4: Plots der Autokorrelationsfunktion ACF und der partiellen Autokorrelationsfunktion PACF für die Exportdaten nach Differenzenbildung; blau gestrichelte Linien markieren Konfidenzintervalle

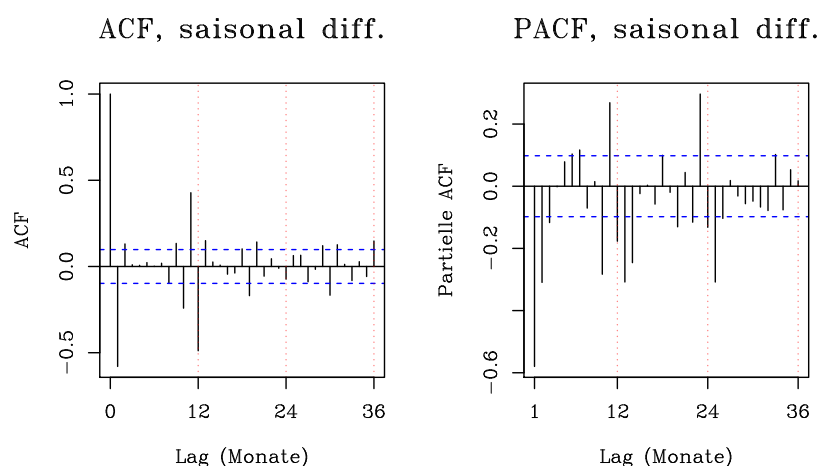


Abbildung 5: Plots der Autokorrelationsfunktion ACF und der partiellen Autokorrelationsfunktion PACF für die Exportdaten nach allgemeiner und saisonaler Differenzenbildung; blau gestrichelte Linien markieren Konfidenzintervalle

4.3.2 Identifikation eines Regressionsmodells mit ARIMA-Störterm

In R werden die Parameter eines Regressionsmodells mit ARIMA-Störterm gleichzeitig über die Maximum-Likelihood-Methode geschätzt und dabei für die Residuen aus der Regression von $\frac{T_t}{\tau}$ auf die Daten keine Unabhängigkeitsannahmen getroffen. Wird dagegen zunächst ein Kleinstquadrateschätzer für den Parameter π ermittelt, hat dieser nicht mehr Optimalitätseigenschaften (vgl. Hyndman and Athanasopoulos 2014). Dennoch soll zunächst eine lineare Regression durchgeführt werden, damit die Struktur der Störterme analysiert und ein ARIMA-Modell identifiziert werden kann.

Für $\tau = 3$ zeigen die Ergebnisse der Einheitswurzel-Tests, dass die allgemeine Differenzordnung $d = 1$ betragen sollte (zunächst p-Werte von 0,2901 beim ADF- und 0,01

beim KPSS-Test, nach einfacher Differenzenbildung Werte von 0,01 bzw. 0,1 bei besagten Tests). Die Ergebnisse für $\tau = 7, \tau = 14$ sind nahezu identisch.

Ähnlich wie im einfachen ARIMA-Modell, deuten die in Abbildung 6 gegebenen Plots der ACF und der PACF auf einen AR(2)- oder ARMA(1, 1)-Prozess hin. Allerdings sind nunmehr keine eindeutig persistenten Ausbrüche bei den saisonalen Lags 12, 24, 36 zu sehen, die eine saisonale Differenzordnung nahelegen würden. Möglicherweise liegt jedoch ein saisonaler ARMA(1, 1)-Prozess vor, da die jeweiligen Funktionswerte für Lag 12 relativ hoch sind im Vergleich zu denen für Lag 24 und 36. Allerdings wäre auch ein saisonaler AR(1)-Prozess denkbar, da sich der vergleichsweise hohe Wert der ACF bei Lag 12 auch in das Bild gedämpfter Schwingungen einbetten lässt. Die Funktionen nach der Regression mit Werten für $\tau = 7, \tau = 14$ sehen ähnlich aus und lassen daher vergleichbare Überlegungen zu, siehe dazu Abbildung 7 im Anhang.

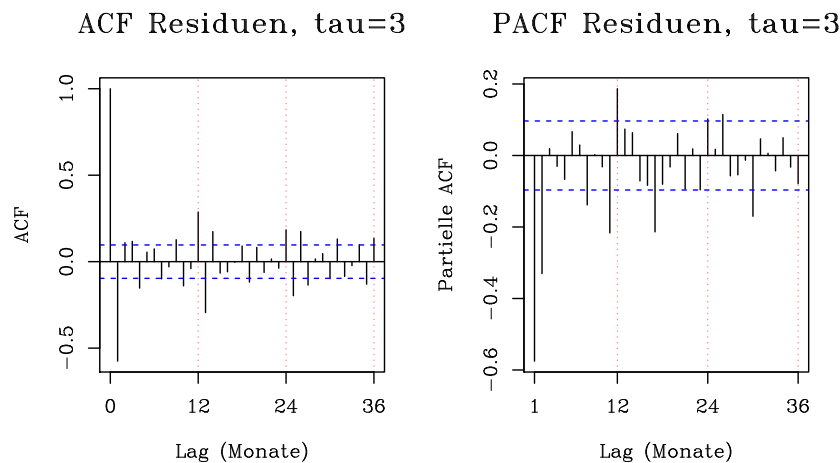


Abbildung 6: Plots der Autokorrelationsfunktion ACF und der partiellen Autokorrelationsfunktion PACF für die Exportdaten nach Regression mit $\tau = 3$ und Differenzenbildung; blau gestrichelte Linien markieren Konfidenzintervalle

4.4 Modellschätzung und Diagnose

Für die jeweils unterschiedlichen Werte von τ werden die Parameter der oben genannten Modellvorschläge sowie die einiger ebenso möglichen Modelle geschätzt. Über das AICc- und BIC-Kriterium können dann die Modelle ausgewählt werden, die gegeben den funktionalen Vorstellungen am besten auf die Daten passen.

Für das ARIMA-Modell ohne Regressor (bzw. $\tau = 0$) zeigt sich, dass wider Erwarten das Modell $(0, 1, 2) \times (1, 0, 1)$ mit Saisonlänge $s = 12$ die höchsten Diagnosewerte bringt (siehe Tabelle 1). Die saisonale Differenzenordnung sollte also für diesen Fall null betragen. Für

Wert von τ	Modell	Ordnung	AICc	BIC
$\tau = 0$	1	$(0, 1, 2) \times (0, 1, 1)$	-957,3490	-941,4844
	2	$(0, 1, 2) \times (1, 1, 1)$	-959,1330	-939,3280
	3	$(1, 1, 1) \times (1, 1, 1)$	-953,3681	-933,5630
	4	$(1, 1, 1) \times (0, 1, 1)$	-951,5428	-935,6782
	5	$(0, 1, 2) \times (1, 0, 1)$	-983,3927	-963,4354
$\tau = 3$	1	$(1, 1, 1) \times (1, 0, 0)$	-1039,756	-1019,798
	2	$(1, 1, 1) \times (1, 0, 1)$	-1087,067	-1063,148
	3	$(0, 1, 2) \times (1, 0, 1)$	-1096,264	-1072,345
	4	$(0, 1, 2) \times (1, 0, 0)$	-1047,364	-1027,407
	5	$(0, 1, 2) \times (1, 1, 1)$	-999,034	-975,2989
$\tau = 7$	1	$(1, 1, 1) \times (1, 0, 0)$	-1036,612	-1016,655
	2	$(1, 1, 1) \times (1, 0, 1)$	-1071,828	-1047,909
	3	$(0, 1, 2) \times (1, 0, 1)$	-1080,751	-1056,832
	4	$(0, 1, 2) \times (1, 0, 0)$	-1044,678	-1024,721
	5	$(0, 1, 2) \times (1, 1, 1)$	-1003,543	-979,8079
$\tau = 14$	1	$(1, 1, 1) \times (1, 0, 0)$	-1052,465	-1032,508
	2	$(1, 1, 1) \times (1, 0, 1)$	-1077,306	-1053,388
	3	$(0, 1, 2) \times (1, 0, 1)$	-1086,168	-1062,249
	4	$(0, 1, 2) \times (1, 0, 0)$	-1060,725	-1040,767
	5	$(0, 1, 2) \times (1, 1, 1)$	-999,034	-975,2989

Tabelle 1: Diagnosewerte für ARIMA-Modelle unterschiedlicher Ordnungen und Werten für τ

$\tau = 3, \tau = 7, \tau = 14$ eignen sich ebenfalls die ARIMA-Ordnungen $(0, 1, 2) \times (1, 0, 1)$ mit $s = 12$ am besten. Ohne Spezifikation von τ sieht dieses Modell wie folgt aus:

$$Y_t = \pi \frac{\tau_t}{\tau} + \frac{(\beta_1 \epsilon_{t-1} - \beta_2 \epsilon_{t-2}) \phi_1 y_{t-12}}{\beta_1 \epsilon_{t-12}} (1 - B)^{-1} \epsilon_t, \epsilon_t \sim i.i.d. N(\mu, \sigma_\epsilon^2). \quad (4.5)$$

Für diese Modelle sind in Tabelle 2 die über die Maximum-Likelihood-Methode berechneten Schätzer angegeben. Es ist zu sehen, dass der Schätzwert für π für sämtliche Modelle mit Regressor negativ ist; damit üben die Feiertage also einen abschwächenden Effekt auf die Exporte aus.

4.5 Modellvergleich

Wie in den vorhergehenden Ergebnissen sichtbar ist, hat die Hinzunahme des Feiertagsregressors offensichtlich eine positive Wirkung auf die Anpassungsgüte. Dabei erscheinen die Modelle mit $\tau = 3$ mit einer Ordnung von $(0, 1, 2) \times (1, 0, 1)$ mit $s = 12$ am plausibelsten.

Allerdings kann das Modell ohne Feiertagsregressor auch als Spezialfall eines Modells mit Regressor der Form (4.5) gesehen werden, in welchem $\tau \neq 0$ ist, aber der Parameter π auf null gesetzt wird. Dadurch verfügt es automatisch über eine niedrigere Likelihood als das

Modell	Ordnung	Parameterwerte
$\tau = 0$, Modell 5	$(0, 1, 2) \times (1, 0, 1)$	$\hat{\beta}_1 = -0,7935$; $\hat{\beta}_2 = 0,2421$; $\hat{\phi}_1 = 0,9925$; $\hat{\theta}_1 = -0,8661$
$\tau = 3$, Modell 3	$(0, 1, 2) \times (1, 0, 1)$	$\hat{\beta}_1 = -0,7493$; $\hat{\beta}_2 = 0,289$; $\hat{\phi}_1 = 0,9658$; $\hat{\theta}_1 = -0,8039$; $\hat{\pi} = -0,1579$
$\tau = 7$, Modell 3	$(0, 1, 2) \times (1, 0, 1)$	$\hat{\beta}_1 = -0,7700$; $\hat{\beta}_2 = 0,2944$; $\hat{\phi}_1 = 0,9581$; $\hat{\theta}_1 = -0,8065$; $\hat{\pi} = -0,1718$
$\tau = 14$, Modell 3	$(0, 1, 2) \times (1, 0, 1)$	$\hat{\beta}_1 = -0,7752$; $\hat{\beta}_2 = 0,2913$; $\hat{\phi}_1 = 0,9274$; $\hat{\theta}_1 = -0,7941$; $\hat{\pi} = -0,2472$

Tabelle 2: Maximum-Likelihood-Schätzer für die jeweiligen Modelle mit höchsten Diagnosenwerten

allgemeine Modell. Aus diesem Grund soll ein Likelihood-Quotienten-Test durchgeführt und so geprüft werden, ob diese Restriktion (Entfernen des Feiertagsregressors) tatsächlich zu wesentlichen Unterschieden führt. Insbesondere würde ein Testergebnis, bei dem die Nullhypothese verworfen werden kann, bedeuten, dass der wahre Wert für den Parameter π des Feiertagsregressor statistisch signifikant von null abweicht und damit die Tage nach dem Chinesischen Neujahr einen Effekt auf die Exportwerte haben.

Die zu prüfende Teststatistik aus Abschnitt 3.5 ist die folgende:

$$-2\log(\Lambda) = -2[l(\hat{\vartheta}_0|y) - l(\hat{\vartheta}|y)], \quad (4.6)$$

wobei innerhalb der Parametermenge Θ_0 gelten soll, dass $\pi = 0$ ist und ansonsten die Maximum-Likelihood-Schätzer aus Tabelle 2 verwendet werden. In Θ dagegen ist π nicht unbedingt 0. Der Likelihood-Quotienten-Test soll für die Likelihood des Modells ohne Regressor in Relation zu der aller drei Modelle mit Regressor durchgeführt werden. In jedem Fall beträgt die Anzahl der Restriktionen $k = 1$, da das Modell (4.5) keinen Interzept enthält. Die Teststatistik ist unter Gültigkeit der Nullhypothese („Die Restriktion auf π wirkt sich nicht auf die Likelihood des Modells aus“), approximativ χ^2 -verteilt mit $k = 1$ Freiheitsgraden.

Die Ergebnisse der Likelihood-Quotienten-Tests sind in Tabelle 3 notiert. Für alle Fälle

Test	Wert der Teststatistik	Wert der χ^2 -Verteilung	Testergebnis
$\tau = 0$ zu $\tau = 3$	114.93	3.841459	H_0 wird verworfen
$\tau = 0$ zu $\tau = 7$	22.22	3.841459	H_0 wird verworfen
$\tau = 0$ zu $\tau = 14$	104.83	3.841459	H_0 wird verworfen

Tabelle 3: Ergebnisse der Likelihood-Quotienten-Tests

wird die Nullhypothese verworfen. Ein Modell ohne Feiertagsregressor ist also signifikant schlechter als eines, in dem die Effekte berücksichtigt werden.

5 Fazit

Ziel der Bachelorarbeit war es, den Einfluss des Chinesischen Neujahrs zu modellieren und zu zeigen, dass sich eine Einbindung dessen positiv auf die Anpassungsgüte des Modells auswirkt. Zumindest für die Variable Exporte bestand außerdem die Überlegung, dass die Feiertage nach dem Chinesischen Neujahr zu einem Rückgang der Exportwerte führen sollten.

Dafür wurde eine Zeitreihe über die taiwanesischen Exporte betrachtet. Nach Stationarisierung und einer linearen Trendbereinigung dieser konnten ARIMA-Modelle mit unterschiedlichen Annahmen über die Länge des Feiertagseffekts an die Daten angepasst werden. Ein Vergleich zeigte, dass in jedem Fall die Beachtung des Effekts zu einem nachweisbar besseren Modell führt. In dem am besten zu den Daten passenden Modell wirken sich drei Tage ab dem Chinesischen Neujahr negativ auf die Exportleistungen aus. Insbesondere führt es in diesem Modell zu einer negativen Abweichung vom langfristigen Trend von fast 16%, wenn sämtliche betrachteten Tage in einen Monat fallen, was in der Kernaussage den Behauptungen am Anfang der Arbeit entspricht.

Die Ergebnisse der Analysen können eine gute allgemeine Richtung aufzeigen, die für die Problematik der zeitlichen Lage des Chinesischen Neujahrs gilt. Um noch fundiertere Aussagen treffen zu können, wäre es allerdings nötig, die Modelle (über den Rahmen einer Bachelorarbeit hinaus) noch weiter zu verfeinern. So zeigten zum Beispiel Bell and Hillmer (1983), dass die Nichtberücksichtigung des Regressors der Anzahl unterschiedlicher Werkzeuge in einem Monat zu einem statistisch signifikant schlechterem Modell führt. Für ein revidiertes Modell müssten diese „Trading-Day“-Effekte daher ebenfalls einfließen.

Eine weitere Verbesserung wäre es, die Intervalle zwischen den getesteten Effektlängen zu verfeinern. So waren die Modelle für eine Effektlänge von drei Tagen ab dem Chinesischen Neujahr am besten, es wurden allerdings nur drei weitere Werte geprüft. Es wäre auch denkbar, sich nicht nur auf Feiertagseffekte vor bzw. nach dem Chinesischen Neujahr zu beschränken, sondern die Problematik beidseitig zu betrachten. In diesem Fall würde die Anzahl an Tagen vor dem Chinesischen Neujahr in einem Monat ebenso eine Rolle spielen wie die Anzahl der Tage nach dem Feiertag. Insgesamt hätten diese Überlegungen allerdings zu einer großen Vielzahl zusätzlich zu betrachtender und auszuwertender Modelle geführt.

Konkret für die betrachtete Exportreihe hätte die Bereinigung des deterministischen Trends auch über andere Methoden als die der linearen Regression mit der Zeit erfolgen können. So wären die Werte der Abweichungen vom Trend vielleicht geeigneter für die ARIMA-Modelle gewesen, da es in der Praxis auch zu Trendbrüchen kommen kann. Auf der anderen Seite hat der lineare Trend den Vorteil, dass über ihn die originale Zeitreihe leicht rekonstruierbar ist.

Zuletzt besteht natürlich die Möglichkeit, die in dieser Arbeit erläuterten Methoden auf weitere Zeitreihen anzuwenden und den Effekt des Chinesischen Neujahrs auf unterschied-

liche Daten zu untersuchen. Beispielsweise könnte man, um das Problem der eingeschränkten Veröffentlichungen der Volksrepublik Chinas zu umgehen, historische Daten der Importe anderer Länder aus China betrachten, was einen Einblick in die Entwicklung der chinesischen Exporte geben könnte. Auf diese lässt sich zuweilen auf den Seiten der nationalen statistischen Ämter zugreifen. In jedem Fall besteht weiterhin Raum für umfassende Analysen bezüglich der in dieser Bachelorarbeit diskutierten Problematik.

Literaturverzeichnis

- Assenmacher, W. (2002). *Einführung in die Ökonometrie*. De Gruyter Oldenbourg.
- Bell, W. R. and Hillmer, S. C. (1983). Modeling time series with calendar variation. *Journal of the American statistical Association*, 78(383):526–534.
- Box, G. E. and Jenkins, G. M. (1976). *Time series analysis: forecasting and control*. Prentice-Hall.
- Deutsche Bundesbank (2012). Kalendarische Einflüsse auf das Wirtschaftsgeschehen. *Monatsbericht*, Dezember 2012(53-63).
- Hyndman, R. (2015). Forecasting functions for time series and linear models. [Online-Ressource; letzter Zugriff 30.Juni 2015].
- Hyndman, R. J. and Athanasopoulos, G. (2014). *Forecasting: principles and practice*. OTexts.
- Johansen, S., Riani, M., and Atkinson, A. C. (2012). The selection of arima models with or without regressors. *Univ. of Copenhagen Dept. of Economics Discussion Paper*.
- Lin, J.-L., Liu, T.-S., et al. (2002). Modeling lunar calendar holiday effects in taiwan. *Taiwan Economic Forecast and Policy*, 33(1):1–37.
- Nau, R. (2015). Statistical forecasting: notes on regression and time series analysis. [Online-Ressource; letzter Zugriff 01.Juli 2015].
- NIST/SEMATECH (2015). e-handbook of statistical methods: 8.2.3.3. likelihood ratio tests. [Online-Ressource; letzter Zugriff 08.Juli 2015].
- Schlittgen, R. and Streitberg, B. H. (2001). *Zeitreihenanalyse*. Oldenbourg Verlag.
- Team, R. C. (2015). Documentation for package ‘stats’ version 3.2.1. [Online-Ressource; letzter Zugriff 01.Juli 2015].
- Trapletti, A. (2015). Time series analysis and computational finance. [Online-Ressource; letzter Zugriff 30.Juni 2015].
- Von der Lippe, P. M. (2015). Ökonometrie in duisburg: Einheitswurzeltest (unit-root test) und kointegrationstest (6 seiten). [Online-Ressource; letzter Zugriff 30.Juni 2015].
- Wilks, S. S. (1938). The large-sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses. *The Annals of Mathematical Statistics*, 9(1):60–62.

Anhang

```
> summary(LNExp.lm)

Call:
lm(formula = as.vector(LNExp.z) ~ seq(1:length(LNExp.z)))

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.46346 -0.09635  0.02493  0.10860  0.28430

Coefficients:
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)      7.780e+00   1.380e-02   563.6  <2e-16 ***
seq(1:length(LNExp.z)) 6.525e-03   5.779e-05   112.9  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.14 on 411 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9688,    Adjusted R-squared:  0.9687
F-statistic: 1.275e+04 on 1 and 411 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Listing 1: Anpassung eines linearen Trends an die logarithmierten Exportwerte über OLS-Schätzung

```
> dwt(LNExp.lm)
lag Autocorrelation D-W Statistic p-value
  1         0.6337195      0.7179496      0
Alternative hypothesis: rho != 0
```

Listing 2: Ergebnis des Dubin-Watson Tests zum Lag 1. Der p-Wert von 0 legt nahe, dass die Nullhypothese unkorrelierter Störterme verworfen werden kann.

```
> adf.test(LNExp.z, alternative = "stationary")

Augmented Dickey-Fuller Test

data:  LNExp.z
Dickey-Fuller = -2.8937, Lag order = 7, p-value = 0.1998
alternative hypothesis: stationary

> kpss.test(LNExp.z, null = "Level")

KPSS Test for Level Stationarity
```

```

data:  LNExp.z
KPSS Level = 0.8582, Truncation lag parameter = 4, p-value = 0.01

Warning message:
In kpss.test(LNExp.z, null = "Level") :
  p-value smaller than printed p-value

```

Listing 3: Ergebnisse des ADF-Tests (Nullhypothese Nichtstationarität) und des KPSS-Tests (Nullhypothese Stationarität) für das Modell ohne Regressor.

```

> dLNExp.z <- diff(LNExp.z) #einfache Differenzenbildung
> adf.test(dLNExp.z)

      Augmented Dickey-Fuller Test

data:  dLNExp.z
Dickey-Fuller = -9.588, Lag order = 7, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary

Warning message:
In adf.test(dLNExp.z) : p-value smaller than printed p-value
>
> kpss.test(dLNExp.z, null = "Level")

      KPSS Test for Level Stationarity

data:  dLNExp.z
KPSS Level = 0.0527, Truncation lag parameter = 4, p-value = 0.1

Warning message:
In kpss.test(dLNExp.z, null = "Level") :
  p-value greater than printed p-value

```

Listing 4: Ergebnisse des ADF-Tests und des KPSS-Tests für das Modell ohne Regressor nach einfacher Differenzenbildung. Die Ergebnisse deuten Stationarität an.

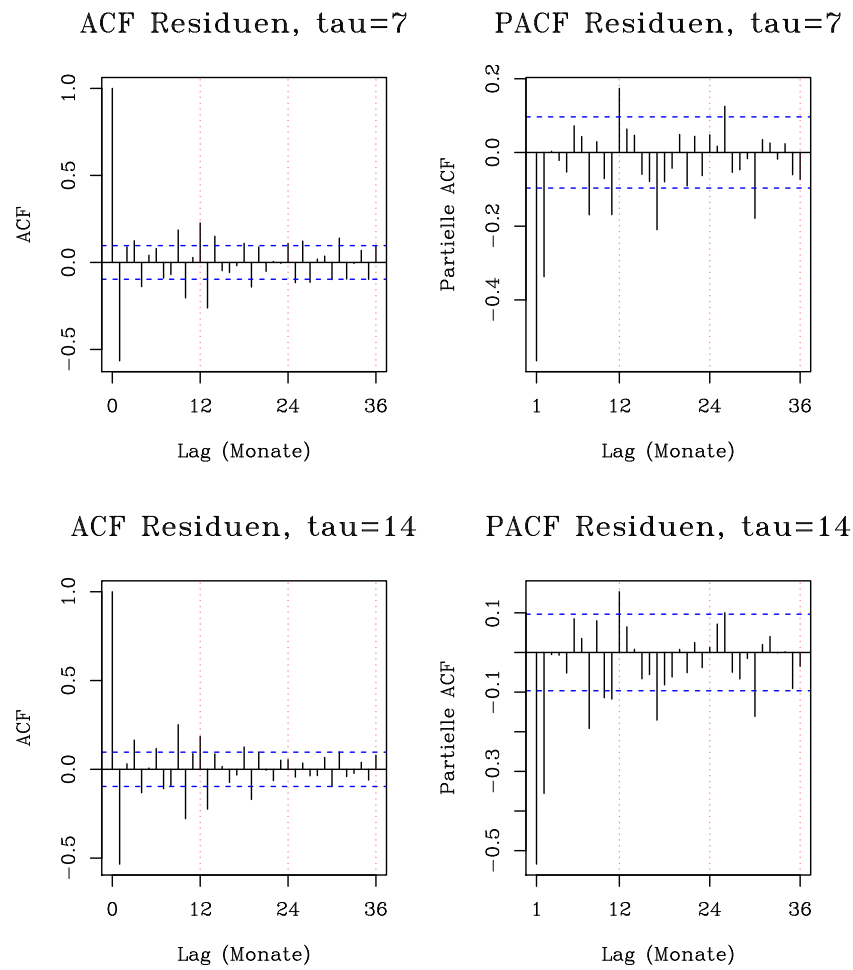


Abbildung 7: Plots der Autokorrelationsfunktion ACF und der partiellen Autokorrelationsfunktion PACF für die Exportdaten nach Regression mit $\tau = 7$ bzw. $\tau = 14$ und Differenzenbildung; blau gestrichelte Linien markieren Konfidenzintervalle